LÓGICA GERAL

por Arthur Buchsbaum

PREFÁCIO

Este trabalho provém de notas de aula que venho elaborando desde a segunda metade dos anos oitenta. Estas foram crescendo com o tempo, sendo que em determinadas épocas passaram por ampliações notáveis.

A maioria dos livros-texto de Lógica por mim examinados não tem me satisfeito em muitos pontos, o que me levou à necessidade de contribuir com uma versão minha deste maravilhoso assunto.

Cito a seguir alguns dos defeitos que tenho encontrado em vários livros-texto:

- Há uma confusão entre instanciação e substituição, as quais são idéias diferentes, com aplicações diferentes e resultados concernentes diferentes.
- Há um tratamento descuidado para as propriedades da igualdade e da equivalência. Tal assunto parece ser tão trivial que muitos lógicos costumam desprezá-lo, dedicando em geral poucas linhas ao mesmo. Isto chega a gerar erros graves em alguns livros-texto de matemática.
- Há certo desprezo por assuntos considerados elementares, os quais são tratados freqüentemente de forma superficial e, às vezes, de uma forma bem pouco prática.
- Quase todos estes livros carecem de listas expressivas de teoremas no nível dos sistemas lógicos estudados. Os mesmos consideram-nos talvez bem elementares, e logo partem para questões metalógicas.
- Muitas das notações da literatura concernente pecam por usar um número excessivo de parênteses, ficando assim bem pesadas.

Tenho buscado suprir estas falhas neste trabalho, o qual apresenta as seguintes características:

- Estudo acurado e detalhado, com todos os resultados conseqüentes, da instanciação e da substituição, aplicando este conhecimento para um estudo mais profundo da equivalência e da igualdade.
- Aplicação de idéias concernentes à substituição para um estudo de regras concernentes à implicação, assim generalizando as leis lógicas conhecidas comumente como modus ponens e modus tollens.
- Listas as mais amplas possíveis de teoremas considerados importantes, aos níveis da lógica clássica proposicional, quantificacional, equacional, descritiva clássica, e das descrições indefinidas.
- Tratamento minucioso das questões sintáticas relevantes das diversas linguagens formais.
- Dentro do tópico de lógica quantificacional, há um estudo detalhado dos assim chamados quantificadores típicos, os quais refletem a maioria dos contextos em que tais quantificadores são utilizados.
- No tópico de lógica equacional há um estudo detalhado dos quantificadores numéricos.

Este livro destina-se a estudantes de graduação e pós-graduação de ciências da computação, sistemas de informação, engenharia da computação, matemática e filosofia.

Quero expressar agradecimentos a alguns de meus alunos que ajudaram de forma significativa no preparo deste trabalho, em algumas de suas fases, entre eles Katia Régia Arruda Lima, Myrla Patrícia Reis Sales, Benedito Palheta, e Andressa Sebben.

Arthur Buchsbaum
São José, 26 de agosto de 2006.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

§1. Algumas Motivações para o Estudo da Lógica

A Lógica é a ciência e arte do raciocínio. O raciocínio é uma forma de processamento simbólico de informações que visa tornar explícitas formas de conhecimento que antes estavam implícitas. Enquanto ciência, esta possui uma metodologia própria, que prioriza as manifestações do raciocínio que surgem no âmbito de contextos lingüísticos organizados. Enquanto arte, busca a modelagem de sistemas formais que representem fielmente formas de raciocínio ainda não captadas em toda a sua plenitude. O estudo, conhecimento e cultivo da Lógica revelam ferramentas bem importantes para uma evolução cognitiva de todo ser humano que queira ser realmente livre, não condicionado pelo medo e por crenças nocivas constantemente propaladas por diversos meios de comunicação da maioria das sociedades, tanto do presente como de várias eras passadas. Tal evolução cognitiva conduz à clareza no pensar, o que torna possível a prática de uma constante depuração do que não é verdadeiro para cada um, o que é essencial para um contato cada vez maior com a própria Verdade. A clareza interna é uma porta para a autêntica Filosofia, a qual leva a uma viagem sem fim rumo ao encontro com Tudo. A Lógica relaciona-se intimamente com três grandes áreas de conhecimento: Matemática, Informática e Filosofia. Vários dos fundadores da moderna Ciência da Computação foram lógicos. A Inteligência Artificial Simbólica tem na Lógica um de seus principais pilares. Toda a Matemática utiliza-se, em sua expressão lingüística, de conceitos puramente lógicos; não é possível daí entender Matemática seriamente sem entender em detalhes a Lógica, pelo menos em suas bases elementares.

§2. O Escopo da Lógica

Como uma primeira aproximação, podemos dizer que *Lógica* é a ciência e a arte do raciocínio correto. Para entendermos isto melhor, precisamos fazer uma digressão, descrevendo um amplo contexto, dentro do qual localizaremos finalmente o papel e escopo da Lógica.

Existem dois conceitos fundamentais basilares: *Realidade* e *Consciência*.

Nunca houve unanimidade, nem hoje em dia, nem no passado, quanto ao que seria Realidade. Podemos apreender algo do significado do termo “Consciência” a partir de nós próprios, já que somos seres que sentem, pensam e percebem aquilo que parece estar fora de nós. Quanto à Realidade, existem inúmeras perguntas sobre ela, formuladas por filósofos e indagadores de todos os tempos. Ela depende ou não de nossa percepção da mesma? Em que medida ela corresponde ao que parecemos perceber da mesma?

Com certeza, para cada um de nós, algo parece existir que provoca este encadeamento de sentimentos, pensamentos e percepções. O que é real seria mesmo este mundo aparente sugerido pelos nossos sentidos e razão, com espaço, tempo, matéria, sol, planetas, estrelas, oceanos e continentes? Existem filósofos que respondem afirmativamente, outros assumem uma posição oposta.

Poderíamos, sem entrar no mérito estrito desta discussão, classificar o que é *real* de duas formas distintas:

- No sentido estrito ou *cético*, algo é real com respeito a uma dada consciência se aquilo sempre se manifesta, em todas as circunstâncias; assim sendo, sonhos, por exemplo, não seriam reais, pois os mesmos são normalmente não confirmados assim que acordamos.
- No sentido amplo ou *crédulo*, algo é real (com respeito a uma dada consciência) se aquilo se manifesta pelo menos uma vez como uma experiência da consciência, seja como uma experiência sensorial genuína, seja como produto da imaginação.

Entre estes dois extremos de Realidade, pode haver algumas gradações intermediárias. Por exemplo, para quase todos nós, este aparente mundo em que vivemos, abrangendo o Planeta Terra e

o espaço que o circunda, juntamente com a sociedade humana que nela habita, e todas as vivências daí decorrentes, manifesta-se constantemente em nossa consciência, pelo menos no período em que parecemos estar acordados. Mas há alguma garantia de que assim será para sempre, ou tudo isto é apenas mais um sonho, apenas algo mais estável que todo aquele material já por nós vivenciado e classificado como "sonho"?

Aquilo que busca perceber a *Realidade* e que possui ciência de sua própria existência é chamado de *Consciência*. A mesma concebe, em seu íntimo, um reflexo da Realidade, o qual pode refletir, de modo mais ou menos fiel, a própria Realidade.

A consciência humana parece ser provida dos seguintes vetores, os quais concorrem para o seu funcionamento:

- *Razão* – é a faculdade que diz respeito à formação e evolução da estrutura básica de *concepção da Realidade*, erigida pela Consciência. – Distúrbios em seu funcionamento estão ligados a algumas doenças mentais.
- *Emoções* e *Sentimentos* – dizem respeito à coloração que a Consciência empresta à sua concepção da Realidade.
- *Intuição* – é a faculdade da Consciência responsável por uma compreensão global da Realidade, a mais fidedigna possível; é a atmosfera dentro da qual funcionam a Razão, as Emoções e os Sentidos; tem sido vivenciada por muitos homens e mulheres quando os mesmos sentem, subitamente, amplas formas de compreensão, que parecem corresponder a seus mais profundos anseios. – Parece estar ainda subdesenvolvida na maioria dos seres humanos.
- *Instinto* – diz respeito a certas pré-concepções da Realidade assumidas pela Consciência, aparentemente existentes antes da intervenção da Razão, essenciais para a sobrevivência em cada ciclo de existência; grosso modo, este corresponde, no computador, à memória ROM.
- *Libido* – é a força motriz essencial da sexualidade humana, que objetiva uma vivência de completude através de um outro *Ser*; foi extensivamente estudada, no Ocidente, a partir do trabalho de Freud.
- *Sentidos* – compreendem os cinco sentidos clássicos, de visão, audição, tato, olfato e paladar, os sentidos de movimento e posição do corpo, bem como inúmeros outros ainda não devidamente catalogados e estudados. – São a porta através da qual a consciência humana adquire informações básicas da Realidade que parece cercá-la; fornecem uma boa parte do material básico a partir do qual a Consciência molda a sua concepção da Realidade.
- *Crenças* – constituem um método de expansão da concepção de Realidade, não baseado nos sentidos e nas formas mais seguras da Razão; as mesmas podem ser *racionais*, quando refletem formas *indutivas* da Razão, ou *não racionais*, quando não as refletem.
- *Memória* – é um registro das impressões da Consciência, cuja focalização gera a impressão de um tempo passado, a qual induz à crença de uma linha do tempo abrangendo passado, presente e futuro.

A Razão funciona em duas fases que funcionam de uma forma mais ou menos sinérgica:

- *Representação da Realidade* em uma estrutura concebível pela consciência pensante;
- *Raciocínio inferencial* do relativamente conhecido para o desconhecido, segundo esta representação.

Estes dois processos são designados respectivamente de *razão formativa* e *razão operativa*.

A Lógica, como ciência, estuda as manifestações da razão operativa em todos os contextos lingüísticos possíveis, nas linguagens escrita e falada. O estudo de tais manifestações na vida quotidiana, sem nenhuma idealização, é feito por um ramo desta ciência dito *Lógica Informal*. Um estudo idealizado de tais manifestações, lançando mão de *linguagens formais* e métodos matemáticos, é feito pelo ramo dito *Lógica Formal* ou *Simbólica*. O objeto da *Automatização do Raciocínio* ou *Programação em Lógica* abrange a Lógica Formal, e dá uma ênfase especial ao estudo das rotinas racionais da Lógica Formal expressáveis em *algoritmos*.

§3. Linguagens para a Lógica

O funcionamento da razão operativa está essencialmente ligado à obtenção de frases condicionalmente verdadeiras a partir de frases hipoteticamente verdadeiras, daí a compreensão e uso de pelo menos uma *linguagem* parece ser imprescindível.

Podemos classificar as linguagens em dois tipos básicos:

- *Linguagens naturais* ou *informais* – correspondem às línguas usadas habitualmente pelos seres humanos para a sua comunicação quotidiana, tais como o português, inglês, etc. A sua descrição necessita, em geral, de livros com centenas de páginas, pois as regras de suas gramáticas são complexas e numerosas.
- *Linguagens artificiais* ou *formais* – as suas regras gramaticais são simples e, em geral, em pequeno número; algumas, especialmente aquelas utilizadas pela Lógica, detém um poder expressivo comparável ao das linguagens naturais.

Para um estudo das regularidades presentes nas diversas formas de raciocínio, bem como dos possíveis algoritmos correspondentes, as linguagens formais são as mais adequadas, devido à sua simplicidade inerente.

Uma linguagem artificial é definida em duas etapas:

- escolha de um conjunto não vazio de sinais (em geral, gráficos), chamado de *alfabeto*, a serem usados na construção de suas *expressões significativas*;
- enunciação de uma (em geral pequena) coleção de regras (isto é, uma *gramática*) destacando, entre as expressões da linguagem, quais são significativas.

Em uma linguagem natural tais etapas ocorrem de um modo bem mais complexo. Todas as linguagens naturais modernas, em sua versão escrita, também possuem um alfabeto. Os sinais deste alfabeto formam expressões significativas básicas, ditas também *palavras* desta linguagem. Algumas destas palavras são de fato nomes para objetos reais ou imaginários, possuindo daí funções análogas aos *termos* de uma linguagem formal para a Lógica, mas outras possuem outras funções. A coleção de todas as palavras utilizadas por uma linguagem natural é dita o seu *vocabulário*, o qual pode existir implícita ou explicitamente; neste último caso pode haver uma publicação oficial, editada por alguma instituição mantenedora das normas desta linguagem, contendo uma relação completa de todas as palavras constantes do seu vocabulário. Finalmente, certas seqüências de palavras de uma linguagem natural formam um outro tipo de expressões significativas, ditas *frases*, as quais correspondem, grosso modo, às *fórmulas* da Lógica.

Um *universo de discurso* é a coleção de todos os objetos estudados em um dado contexto. Por exemplo, na Teoria dos Números Inteiros o universo de discurso é a coleção dos números inteiros, na Química um possível universo de discurso é a coleção dos elementos químicos, etc.

3.1 Definição: Um *alfabeto* é uma coleção não vazia de sinais.

3.2 Definição: Uma *samblagem* é uma seqüência finita de sinais. Uma *samblagem em um dado alfabeto* é uma seqüência finita de sinais deste alfabeto. A lista vazia de sinais é dita a *samblagem vazia*, notada por "Λ".

3.3 Definição: Dadas duas samblagens **u** e **v**, a concatenação de **u** e **v**, notada por **u** + **v**, é a samblagem obtida justapondo-se, da esquerda para a direita, preservando a ordem original, os sinais de **u** com os sinais de **v**.

3.4 Definição: Sejam **u** e **v** samblagens. Especificamos a seguir o que entendemos por iniciar uma samblagem e por terminar uma samblagem.

- **u** inicia **v** ⇌ existe uma samblagem **u'** tal que **u** + **u'** = **v**.
- **u** termina **v** ⇌ existe uma samblagem **u'** tal que **u'** + **u** = **v**.
- **u** inicia propriamente **v** ⇌ **u** ≠ Λ e **u** inicia **v** e **u** ≠ **v**.
- **u** termina propriamente **v** ⇌ **u** ≠ Λ e **u** termina **v** e **u** ≠ **v**.

As *samblagens significativas de uma linguagem formal* utilizada na Lógica são samblagens de um dos dois tipos básicos:

- *termos* – são nomes de objetos do universo de discurso;
- *fórmulas* – são afirmações ou asserções, na linguagem formal considerada, acerca de objetos do universo de discurso.

Todos os *sistemas lógicos*, com exceção das *lógicas proposicionais*, possuem linguagens suficientemente ricas cujas samblagens significativas são termos e fórmulas.

3.5 Notação: As seguintes referências serão usadas, para as listas de letras descritas abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices, a não ser que o contrário seja dito:

- **P**, **Q**, **R**, **S** – referem-se a fórmulas na lógica considerada;
- **Γ**, **Δ**, **Φ** – referem-se a coleções de fórmulas na lógica considerada.

§4. Sistemas Lógicos

Definimos um *sistema lógico* ou *lógica* em duas fases:

- Fornecemos uma *gramática*, a qual especifica as *linguagens formais deste sistema*; cada uma destas linguagens formais possui a sua coleção própria de fórmulas.
- Para cada uma destas linguagens formais, fornecemos uma *teoria*, a qual especifica, dentre as fórmulas do sistema, quais devem ser consideradas absolutamente verdadeiras, e, para cada contexto de fórmulas supostas hipoteticamente verdadeiras, quais são verdadeiras neste contexto.

Quanto à profundidade de raciocínio envolvida, existem sistemas lógicos concebidos para diferentes níveis, a saber:

- *Lógica proposicional* – a mesma estuda relações simples entre fórmulas, as quais correspondem a expressões tais como "se…então", "e", "ou", "não é verdade que", etc.
- *Lógica quantificacional* – além das já citadas relações, estuda o comportamento de certas variações de referências feitas no interior de fórmulas; tais variações correspondem a expressões do tipo "para todo", "para cada", "para algum", "existe pelo menos um", "nenhum", etc.
- *Lógica equacional* – além do que é feito nos dois níveis acima, lida com a equivalência de referências; corresponde a expressões do tipo "é igual a", "é idêntico a", etc.
- *Lógica descritiva* – lida também com especificações, ambíguas ou não, de objetos do universo de discurso; corresponde a expressões do tipo "um objeto ***x*** possuindo a propriedade **P**", "o objeto ***x*** possuindo a propriedade **P**", etc.
- *Teoria dos conjuntos* – é a base, o substrato comum, em que se baseia toda a matemática tradicional; estuda as propriedades comuns a coleções em geral.

Quanto à forma de raciocínio envolvida, existem, entre outros, os seguintes sistemas lógicos:

- *Lógica clássica* – é a forma de lógica que serve de base implícita para quase toda a matemática; até meados do século XX era praticamente o único sistema existente, e ainda hoje é considerado um padrão de raciocínio correto. – A lógica clássica possui, entre outros, os seguintes princípios, formulados originalmente por Aristóteles:
  - ♦ Toda fórmula ou a sua negação é verdadeira; não há uma terceira condição possível. Este é dito o *princípio do terceiro excluído*.
  - ♦ Uma fórmula e a sua negação não podem ser ambos verdadeiros. Este é dito o *princípio da não contradição*.
  - ♦ Uma fórmula verdadeira é sempre verdadeira, e uma fórmula falsa é sempre falsa; ou seja, o valor veritativo de uma fórmula com respeito a uma dada interpretação é estável e permanente; o mesmo não pode variar. Este é dito o *princípio da identidade*.

- *Lógicas paracompletas* – são lógicas que não respeitam o princípio do terceiro excluído. Uma lógica paracompleta especial, a qual tem sido extensivamente estudada, que talvez seja a única que rivaliza seriamente, em importância, com a lógica clássica, é a *lógica intuicionista*; esta estuda o *raciocínio construtivo*. Nas mesmas "$\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{P}$" não é sempre verdadeiro.
- *Lógicas paraconsistentes* – não respeitam o princípio da não contradição, daí são ideais para lidar-se com *contradições*. Nas mesmas uma dada contradição não acarreta qualquer fórmula, isto é, "$\mathbf{P} \to \neg\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$" não é sempre verdadeiro.
- *Lógicas não reflexivas* – são aquelas que não respeitam o princípio da identidade; nelas pode acontecer de uma fórmula não implicar a si própria, ou seja, nas mesmas "$\mathbf{P} \to \mathbf{P}$" não é necessariamente uma tese.
- *Lógicas relevantes* – são aquelas que interpretam a implicação de uma forma mais estrita, na qual é suposto haver algum tipo de relacionamento estrutural ou causal entre o antecedente e o conseqüente de uma implicação considerada verdadeira.
- *Lógicas não monotônicas* – são aquelas nas quais o acréscimo de novas premissas pode invalidar conclusões já obtidas. Até os anos setenta, praticamente só eram conhecidas as lógicas monotônicas. As *lógicas indutivas* são um dos gêneros mais importantes destas lógicas.
- *Lógicas modais* – são aquelas que estudam as possíveis variações da veracidade ou falsidade ao longo de certas entidades denominadas *mundos*. O *valor veritativo de uma fórmula* pode variar ao longo dos mundos. Duas das principais idéias estudadas por tais lógicas são a *necessidade* e a *possibilidade*.

Os sistemas que divergem da lógica clássica são ditos *deviantes*, como por exemplo as lógicas paraconsistentes, paracompletas, não reflexivas, relevantes e não monotônicas acima citadas. As lógicas modais podem erigir-se tanto sobre a lógica clássica (quando neste caso a enriquecem em expressividade), como sobre algum sistema deviante.[1]

Após definirmos quais são as linguagens de um dado sistema lógico, a segunda etapa para defini-lo completamente está no fornecimento de uma relação entre coleções de fórmulas e fórmulas desta lógica que preserve, neste sistema, a idéia de veracidade subjacente a esta lógica.

Existem três vias básicas para isto:

- A *via sintática* parte de certos *objetos formais iniciais* e *regras* que fornecem, de um modo em geral mecânico, novos objetos a partir de uma lista finita de objetos formais já obtidos. Para as lógicas usuais, existem três caminhos para isto:
  - ♦ por *cálculos axiomáticos* ou *sistemas de Hilbert* – os objetos formais são *fórmulas*, as *fórmulas iniciais* são ditas *axiomas* e as *regras* associam listas finitas de fórmulas a fórmulas;
  - ♦ por *cálculos de seqüentes* – os objetos formais são pares ordenados, ditos *seqüentes*, cujo primeiro componente é uma coleção de fórmulas e cujo segundo componente é uma fórmula; os *seqüentes iniciais* representam inferências consideradas verdadeiras a priori e as *regras* associam listas finitas de seqüentes a seqüentes;
  - ♦ por *dedução natural* – os objetos formais são *árvores de fórmulas*, onde algumas folhas podem estar marcadas; as folhas não marcadas representam premissas de uma inferência e a raiz representa a conclusão da mesma inferência; as *árvores iniciais* representam assim inferências consideradas verdadeiras a priori, e as *regras* associam listas finitas de tais árvores a novas árvores de fórmulas.
- A *via semântica* baseia-se em um *domínio veritativo*, isto é, em uma coleção de rótulos representando diferentes *gradações de verdade e falsidade*, e em uma coleção de funções, denominadas *valorações*, apresentando certas propriedades básicas, que podem variar de lógica a lógica, associando *fórmulas* a *valores veritativos* (elementos do domínio veritativo).

---

[1] Não há uma distinção completamente nítida entre o que é *deviante* e o que é *complementar* à lógica clássica, pois é possível, pelo menos em muitos casos, fazer conviver no mesmo sistema formas deviantes e clássicas de negação, de implicação, e assim por diante. Assim sendo, certos sistemas, que poderiam ser classificados a princípio como deviantes, podem possuir extensões conservativas que são complementares à lógica clássica.

- A *via da automatização* baseia-se em *algoritmos* cujas *entradas* são seqüentes e cujas *saídas* são possíveis respostas que avaliam cada seqüente considerado. Para as lógicas usuais, existem três métodos básicos:
  - ♦ o método da *resolução* – a partir de um processamento simbólico inicial, obtém-se uma lista de *fórmulas normalizadas* ditas *cláusulas*. Tal lista é sucessivamente ampliada através de uma regra especial, dita *regra da resolução*, visando à derivação da *cláusula vazia*. Se a mesma for encontrada, o seqüente inicial é considerado correto.
  - ♦ o método dos *tablôs* – a partir de uma árvore de fórmulas inicial, obtida em geral pela negação da conclusão do seqüente inicial, é realizada uma expansão sucessiva da mesma, visando ao fechamento de todos os seus ramos. Se isto for conseguido, então o seqüente inicial é considerado correto.
  - ♦ o método dos *seqüentes de Gentzen* – a partir do seqüente inicial, é construída uma árvore de seqüentes especiais, ditos *seqüentes de Gentzen*. O objetivo é obter o fechamento de todos os seus ramos e, se isto for conseguido, então o seqüente inicial é considerado correto.

Por qualquer uma das vias acima citadas, uma lógica define uma *relação de conseqüência* entre coleções de fórmulas e fórmulas nesta lógica. Tal relação de conseqüência exprime tanto a *verdade absoluta* como a *verdade relativa* da lógica considerada.

4.1 Notação: No restante deste trabalho, a não ser que seja dito explicitamente o contrário, $\mathbf{L}$ é um dado sistema lógico ou lógica.

4.2 Notação: Notamos por "$\vdash_{\mathbf{L}}$" a relação de conseqüência definida em $\mathbf{L}$.

"$\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" significa que $\mathbf{P}$ é *verdadeiro em* $\mathbf{L}$ se todas as fórmulas de $\mathbf{\Gamma}$ também o forem. Se $\mathbf{\Gamma} \neq \varnothing$, "$\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" exprime a *veracidade relativa de* $\mathbf{P}$ *em* $\mathbf{L}$ dependendo de $\mathbf{\Gamma}$. Por outro lado, "$\varnothing \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" exprime a *veracidade absoluta de* $\mathbf{P}$ *em* $\mathbf{L}$. Assim, em particular, "$\varnothing \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" significa que $\mathbf{P}$ é verdadeiro em $\mathbf{L}$.

4.3 Leitura: "$\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" pode ser lido de uma das seguintes formas:

- "$\mathbf{\Gamma}$ *acarreta* $\mathbf{P}$ *em* $\mathbf{L}$".
- "*De* $\mathbf{\Gamma}$, *em* $\mathbf{L}$, *afirma-se* $\mathbf{P}$".
- "$\mathbf{P}$ *é conseqüência de* $\mathbf{\Gamma}$ *em* $\mathbf{L}$";
- "$\mathbf{P}$ *é teorema de* $\mathbf{\Gamma}$ *em* $\mathbf{L}$".

4.4 Definição: Se a expressão "$\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" for correta, a mesma é dita ser uma *inferência em* $\mathbf{L}$ e, neste caso, as fórmulas de $\mathbf{\Gamma}$ são ditas *as premissas desta inferência*, e $\mathbf{P}$ é dito ser a *conclusão desta inferência*.

4.5 Notação: Se $\mathbf{L}$ está implícito, podemos prescindir da indicação da lógica envolvida, notando "$\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$" simplesmente por "$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$". Mais algumas notações:

- $\vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P} \rightleftharpoons \varnothing \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$;
- $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P} \rightleftharpoons \{\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}\} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$;
- $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \rightleftharpoons \mathbf{\Gamma} \cup \{\mathbf{P}\} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{Q}$;
- $\mathbf{\Gamma_1},\ldots,\mathbf{\Gamma_n},\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_r} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \rightleftharpoons \mathbf{\Gamma_1} \cup\ldots\cup \mathbf{\Gamma_n} \cup \{\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_r}\} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{Q}$.

4.6 Definição: $\mathbf{P}$ é uma *tese de* $\mathbf{L}$ se $\vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$.

4.7 Definição: $\mathbf{\Gamma}$ é *trivial em* $\mathbf{L}$ se $\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$, para toda fórmula $\mathbf{P}$ em $\mathbf{L}$.[2] Uma fórmula $\mathbf{P}$ é dita *trivial em* $\mathbf{L}$ se $\{\mathbf{P}\}$ é trivial em $\mathbf{L}$.

O ideal, para uma dada lógica, está na obtenção de descrições sintáticas e semânticas da mesma e na demonstração da equivalência de todas estas descrições. Assim, na pesquisa das propriedades desta lógica, podem-se usar as ferramentas mais adequadas em cada caso.

---

[2] Se $\mathbf{L}$ for a lógica clássica e $\mathbf{\Gamma}$ for trivial em $\mathbf{L}$, $\mathbf{\Gamma}$ também é dito *inconsistente em* $\mathbf{L}$, pois, neste caso, $\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$ e $\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \neg\mathbf{P}$.

A nossa via sintática preferencial será, ao longo de todo este trabalho, o método dos cálculos de seqüentes.

§5. Cálculos de Seqüentes

5.1 Definição: Um *seqüente* em **L** é um par ⟨**Γ**,**P**⟩, onde **Γ** é uma coleção de fórmulas em **L** e **P** é uma fórmula em **L**. Um *esquema em* **L** é uma coleção de seqüentes em **L**. Os elementos dos esquemas em **L** são ditos serem os seus *exemplares*. Uma *aplicação em* **L** é um par ⟨∑,ζ⟩, onde ∑ é uma lista finita de seqüentes em **L** e ζ é um seqüente em **L**; os elementos de ∑ são ditos serem *hipóteses da aplicação*, e ζ é dito ser *a conclusão da aplicação*. Uma *regra em* **L** é uma coleção de aplicações em **L**. Uma *lei em* **L** é um esquema em **L** ou uma regra em **L**.

Todo esquema pode ser visto também, grosso modo, como uma regra, que associa uma lista vazia de seqüentes a cada seqüente deste esquema.

5.2 Definição: Um *cálculo de seqüentes para* **L** é definido por leis, as quais são ditas serem as suas *leis primitivas*. As leis primitivas do cálculo são ditas serem os seus *postulados*. Uma *demonstração neste cálculo* é uma lista de seqüentes tais que cada seqüente é exemplar de um esquema primitivo ou é conseqüência de seqüentes anteriores nesta lista por alguma aplicação de uma regra primitiva.

5.3 Definição: Se **L** é definido por um cálculo de seqüentes, dizemos que um *seqüente* ⟨**Γ**,**P**⟩ é *correto* em **L** se existir uma demonstração neste cálculo para este seqüente; se isto acontecer, notamos este fato por $\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathbf{L}} \mathbf{P}$.

5.4 Notação: Considere, a partir de agora, nesta seção, que **L** é definido por um cálculo de seqüentes.

5.5 Definição: Um *esquema* é dito *correto em* **L** se todos os seus exemplares forem corretos em **L**. Uma *aplicação* é dita *correta em* **L** se a correção em **L** de todas as suas hipóteses implica na correção de sua conclusão. Uma *regra* é dita *correta em* **L** se todas as suas aplicações forem corretas em **L**. Uma *lei* é dita *correta em* **L** se esta for um esquema correto em **L** ou uma regra correta em **L**. Um *esquema* correto em **L** que não for primitivo em **L** é dito *derivado em* **L**. Uma *regra* correta em **L** que não for primitiva em **L** é dita *derivada em* **L**. Uma *lei* correta em **L** que não for primitiva em **L** é dita *derivada em* **L**.

Os esquemas primitivos de um cálculo para **L** são coleções de seqüentes considerados corretos a priori em **L**. As regras primitivas deste cálculo são relações fornecidas a priori entre listas finitas de seqüentes e seqüentes que preservam correção em **L**.

2. A LÓGICA PROPOSICIONAL CLÁSSICA

Este capítulo apresenta a *Lógica Proposicional Clássica*, ou simplesmente **LPC**. Esta lógica estuda certas relações externas entre fórmulas, expressas pelos *conectivos*.

§1. Linguagens para a Lógica Proposicional Clássica

1.1 Definição: Um *alfabeto proposicional* contém os seguintes tipos de sinais, mutuamente disjuntos dois a dois:

- *letras sentenciais* – são em si próprias *fórmulas em* **LPC**; podemos considerá-las como referências a frases de qualquer gênero proferíveis em alguma linguagem. – Todo alfabeto proposicional deve possuir pelo menos uma letra sentencial.
- *conectivos* – formam fórmulas a partir de fórmulas; se um conectivo usa **n** fórmulas para formar uma fórmula, dizemos que **n** é a *aridade* deste sinal; os conectivos são em geral de aridades 1 ou 2. – Todo alfabeto proposicional deve possuir pelo menos um conectivo.
- *sinais de pontuação* – são "(", o parêntese de abertura, e ")", o parêntese de fechamento. Se tal alfabeto possuir pelo menos um conectivo de aridade maior ou igual a 3, então ",", a vírgula, também é um sinal de pontuação.

1.2 Definição: Seja ***s*** um conectivo. Se ***s*** possui aridade **n**, dizemos também que ***s*** é **n**-*ário* ou **n**-*ádico*. Se ***s*** possui uma das aridades 1, 2 ou 3, então ***s*** é chamado respectivamente de *monádico*, *diádico* ou *triádico*.

1.3 Definição: Um alfabeto para **LPC** é um alfabeto proposicional possuindo os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$".

1.4 Definição: Uma *fórmula em* **LPC** é uma samblagem em um alfabeto para **LPC** tal que:

- Toda letra sentencial é uma fórmula em **LPC**.
- Se **P** é uma fórmula em **LPC**, então $\neg$**P** é uma fórmula em **LPC**, dita *a negação de* **P**.
- Se **P** e **Q** são fórmulas em **LPC**, então:
  - (**P** $\rightarrow$ **Q**) é uma fórmula em **LPC**, dita *a implicação de* **P** *e* **Q**, cujo *antecedente* é **P**, e cujo *conseqüente* é **Q**.
  - (**P** $\wedge$ **Q**) é uma fórmula em **LPC**, dita *a conjunção de* **P** *e* **Q**, cujos *conjuntores* são **P** e **Q**.
  - (**P** $\vee$ **Q**) é uma fórmula em **LPC**, dita *a disjunção de* **P** *e* **Q**, cujos *disjuntores* são **P** e **Q**.

1.5 Notação: Doravante, a menos que seja dito o contrário, no restante deste capítulo, as letras **p**, **q**, **r**, seguidas ou não de plicas ou subíndices, referem-se a letras sentenciais em **LPC**.

1.6 Notação: A partir de agora, a menos que o contrário seja dito, usaremos o sinal "#" para referirmos-nos a um dos conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$" ou "$\vee$".

1.7 Definição: Seja **L** uma lógica possuindo "$\neg$" como um conectivo monádico. Duas fórmulas em **L** são ditas *contraditórias* se uma delas for negação da outra.

1.8 Definição: Seja **L** uma lógica possuindo "$\neg$" como um conectivo monádico, e **Γ** uma coleção de fórmulas em **L**. Notamos por "$\neg\Gamma$" a coleção $\{\neg \mathbf{P} \mid \mathbf{P} \in \Gamma\}$ de fórmulas em **L**.

1.9 Definição:

- $(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightleftharpoons ((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}))$[3].

"(**P** $\leftrightarrow$ **Q**)" é também dita a *equivalência de* **P** *e* **Q**, cujos *membros* são **P** e **Q**.

---

[3] Isto é, a expressão "(**P** $\leftrightarrow$ **Q**)" é uma abreviatura para a expressão "((**P** $\rightarrow$ **Q**) $\wedge$ (**P** $\rightarrow$ **Q**))".

1.10 Escrita informal de fórmulas em LPC: Sempre que não houver margem para confusão, podemos escrever termos e fórmulas em **LPC** de um modo mais informal, evitando um uso excessivo de parênteses, segundo as seguintes convenções:

- Quando $(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$, $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ não estão escritos como subfórmula de outra fórmula, podemos prescindir do par exterior de parênteses.
- A lista "$\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\{\wedge,\vee\}$" fornece a ordem de prioridade para separação em subfórmulas[4]; por exemplo, "$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$" representa "$\mathbf{P} \leftrightarrow ((\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{S})$".
- Quando o conectivo da implicação se suceder em uma fórmula, a parentetização implícita dá-se da direita para a esquerda; por exemplo, "$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$" representa "$\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}))$".
- Quando conectivos diádicos do mesmo nível hierárquico, distintos do conectivo da implicação, se sucederem em uma fórmula, a parentetização implícita dá-se da esquerda para a direita. Por exemplo, "$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{S}$" representa "$((\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{R}) \leftrightarrow \mathbf{S}$", "$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \wedge \mathbf{R} \wedge \mathbf{S}$" representa "$((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{R}) \wedge \mathbf{S}$", "$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \vee \mathbf{S}$" representa "$((\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}) \vee \mathbf{S}$", "$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \vee \mathbf{R} \wedge \mathbf{S_1} \vee \mathbf{S_2}$" representa "$(((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}) \wedge \mathbf{S_1}) \vee \mathbf{S_2}$".
- Consideramos todos os conectivos diádicos definidos distintos dos conectivos "$\leftrightarrow$" e "$\rightarrow$" como sendo do mesmo nível hierárquico dos conectivos "$\wedge$" e "$\vee$".[5]

1.11 Leitura de fórmulas em LPC:

- "$\neg\mathbf{P}$" pode ser lido como:
  - "*Não* **P**".
  - "*Não é verdade que* **P**".
  - "*Não é o caso que* **P**".
- "$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$" pode ser lido de uma das seguintes formas:
  - "*Se* **P**, *então* **Q**".
  - "**P** *implica* **Q**".
  - "**Q** *se* **P**".
  - "**P** *só se* **Q**".
  - "**P** *somente se* **Q**".
  - "**P** *é suficiente para* **Q**".
  - "**Q** *é necessário para* **P**".
  - "**P** *é condição suficiente para* **Q**".
  - "**Q** *é condição necessária para* **P**".
- "$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$" é lido como "**P** *e* **Q**".
- "$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$" é lido como "**P** *ou* **Q**" no sentido inclusivo, isto é, declarar "**P** ou **Q**" neste sentido significa admitir também a veracidade de ambas as fórmulas.
- "$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$" é lido de uma das seguintes formas:
  - "**P** *equivale a* **Q**".
  - "**P** *é equivalente a* **Q**".
  - "**P** *se*, *e só se*, **Q**".
  - "**P** *se*, *e somente se*, **Q**".
  - "**P** *é necessário e suficiente para* **Q**".
  - "**P** *é uma condição necessária e suficiente para* **Q**".

1.12 Definição: Seja **L** uma lógica na qual qualquer linguagem para a mesma possui "$\rightarrow$" e "$\wedge$" como conectivos. Duas fórmulas **P** e **Q** são ditas serem *equivalentes em* **L** se $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ for uma tese de **L**.

---

[4] Ou, inversamente, podemos dizer que a lista "$\{\wedge,\vee\}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$" dá a ordem de prioridade para aglutinação em subfórmulas.

[5] Na lista de exercícios que se inicia na página 14 são definidos os conectivos diádicos "$\underline{\vee}$", "$\downarrow$" e "$\uparrow$". Os mesmos possuem, portanto, segundo esta convenção, com respeito à escrita informal de fórmulas, o mesmo nível hierárquico dos conectivos "$\wedge$" e "$\vee$".

Não é possível haver ambigüidade de leitura de uma samblagem significativa em uma lógica bem formulada, tal como todas as consideradas neste trabalho. Por exemplo, a frase "um velho bateu em uma velha com um pau" permite pelo menos duas interpretações distintas, dependendo de quem estava segurando o dito pau. A seguir é formulada esta não ambigüidade concernente a uma linguagem para **LPC**.

1.13 Teorema da Legibilidade Única: Cada fórmula em **LPC** só pode ser lida de uma única forma, isto é:

- Uma dada fórmula em **LPC** não possui mais de uma classificação entre as opções letra sentencial, negação, implicação, conjunção e disjunção.
- Se $\neg\mathbf{P}$ e $\neg\mathbf{Q}$ são negações idênticas, então $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.
- Se $(\mathbf{P} \to \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \to \mathbf{S})$ são implicações idênticas, então $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{S}$.
- Se $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \wedge \mathbf{S})$ são conjunções idênticas, então $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{S}$.
- Se $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \vee \mathbf{S})$ são disjunções idênticas, então $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{S}$.

§2. Um Cálculo de Seqüentes para a Lógica Proposicional Clássica

Apresentamos abaixo um cálculo de seqüentes para **LPC**. Este é definido pelas *Leis Estruturais*, *Leis de Introdução de Conectivos e Leis de Eliminação de Conectivos.*

Nesta seção nós falaremos somente da lógica proposicional clássica; assim, para dizer que **P** é conseqüência de $\mathbf{\Gamma}$ na lógica proposicional clássica, notaremos isto por $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

As leis estruturais dizem respeito à própria inferência em si, não dizem respeito a conectivos, quantificadores ou outros sinais específicos de uma dada lógica. As mesmas são válidas em quase todos os sistemas lógicos usuais. A lei da monotonicidade, porém, não é geralmente válida para as lógicas ditas *não monotônicas*.

Leis Estruturais

2.1 Esquema da Reflexividade: Se $\mathbf{P} \in \Gamma$, então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

2.2 Regra da Transitividade: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_1} \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_n} \end{cases}$ e $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n} \vdash \mathbf{Q}$, então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}$.

2.3 Esquema da Monotonicidade: Se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$ e $\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Gamma'}$, então $\mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{P}$.[6]

As regras da compacidade e da transitividade geral, dadas a seguir, não são primitivas deste cálculo de seqüentes, mas sim derivadas.

2.4 Regra da Compacidade: Se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$, então existe $\mathbf{\Gamma'}$ finito tal que $\mathbf{\Gamma'} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{P}$.

2.5 Regra da Transitividade Geral: Se $\begin{cases} \text{para todo } \mathbf{P} \in \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}, \\ \mathbf{\Phi} \vdash \mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}$.

Leis de Introdução e Eliminação de Conectivos

2.6 Regra da Dedução: Se $\Gamma, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$, então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$.[7]

2.7 Modus Ponens: $\mathbf{P}, \mathbf{P} \to \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}$.

2. 8 ∧-Introdução: $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.

2.9 ∧-Eliminação: $\begin{cases} \text{(i)} \quad \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} \quad \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}. \end{cases}$

[6] As lógicas ditas *não monotônicas* ou *indutivas* não aceitam esta regra como válida.
[7] As *lógicas relevantes* não aceitam esta regra sem o estabelecimento de certas conexões entre **P** e **Q**.

2.10 ∨-Introdução: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \lor \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} \;\; \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \lor \mathbf{Q}. \end{cases}$

2.11 Convenção: Consideraremos, doravante, para todos os esquemas de seqüentes de cálculos possuindo a regra da dedução, cujos exemplares só possuem uma premissa, as implicações correspondentes dos mesmos.

Por exemplo, o esquema do ∧-eliminação fornece, aplicando-se a Regra da Dedução, as implicações $\vdash \mathbf{P} \land \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ e $\vdash \mathbf{P} \land \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$. Segundo a convenção acima, podemos usar diretamente estas implicações em quaisquer provas, bastando citar o seu esquema correspondente, o qual é, neste caso, o ∧-eliminação.

2.12 Esquema da Prova por Casos: $\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}, \mathbf{P} \to \mathbf{R}, \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \vdash \mathbf{R}$.

2.13 Regras da Redução ao Absurdo:[8]

- **¬-Introdução**: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \neg\mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{P}$.
- **¬-Eliminação**: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ \mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{P} \vdash \neg\mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.[9]

Leis Básicas dos Conectivos

2.14 Reflexividade da Implicação: $\vdash \mathbf{P} \to \mathbf{P}$.

2.15 Não Contradição: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \mathbf{P}, \neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} \;\; \vdash \neg(\mathbf{P} \land \neg\mathbf{P}). \end{cases}$

2.16 Terceiro Excluído: $\vdash \mathbf{P} \lor \neg\mathbf{P}$.

2.17 Conseqüente da Implicação: $\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$.

2.18 Antecedente da Implicação: $\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$.

2.19 Silogismo Hipotético: $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{R}$.

2.20 Regra Recíproca da Dedução: Se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, então $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

2.21 Dupla Negação: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} \;\; \mathbf{P} \vdash \neg\neg\mathbf{P}. \end{cases}$

2.22 Modus Tollens: $\neg\mathbf{Q}, \mathbf{P} \to \mathbf{Q} \vdash \neg\mathbf{P}$.

2.23 Contraposição: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \mathbf{P} \to \mathbf{Q} \vdash \neg\mathbf{Q} \to \neg\mathbf{P}; \\ \text{(ii)} \;\; \neg\mathbf{Q} \to \neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}. \end{cases}$

2.24 Silogismo Disjuntivo: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \neg\mathbf{P}, \mathbf{P} \lor \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} \;\; \neg\mathbf{Q}, \mathbf{P} \lor \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}. \end{cases}$

2.25 Negação da Implicação: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \neg(\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \vdash \mathbf{P} \land \neg\mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} \;\; \mathbf{P} \land \neg\mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \to \mathbf{Q}). \end{cases}$

2.26 Negação da Conjunção: $\begin{cases} \text{(i)} \;\; \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \vdash \mathbf{P} \to \neg\mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} \;\; \mathbf{P} \to \neg\mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}); \\ \text{(iii)} \;\; \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \vdash \mathbf{Q} \to \neg\mathbf{P}; \\ \text{(iv)} \;\; \mathbf{Q} \to \neg\mathbf{P} \vdash \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}). \end{cases}$

---

[8] As lógicas *paraconsistentes* e / ou *paracompletas* não aceitam, em geral, tais regras.

[9] A *lógica intuicionista* não aceita a segunda regra da redução ao absurdo como válida.

2.27 De Morgan: $\begin{cases} \text{(i)} & \neg(\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \vdash \neg\mathbf{P} \land \neg\mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} & \neg\mathbf{P} \land \neg\mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}); \\ \text{(iii)} & \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \vdash \neg\mathbf{P} \lor \neg\mathbf{Q}; \\ \text{(iv)} & \neg\mathbf{P} \lor \neg\mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q}). \end{cases}$

2.28 Implicação Material: $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{P} \to \mathbf{Q} \vdash \neg\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} & \neg\mathbf{P} \lor \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}. \end{cases}$

2.29 Redução da Disjunção: $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{P} \lor \mathbf{Q} \vdash \neg\mathbf{P} \to \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} & \neg\mathbf{P} \to \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \lor \mathbf{Q}; \\ \text{(iii)} & \mathbf{P} \lor \mathbf{Q} \vdash \neg\mathbf{Q} \to \mathbf{P}; \\ \text{(iv)} & \neg\mathbf{Q} \to \mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \lor \mathbf{Q}. \end{cases}$

2.30 $\leftrightarrow$-Eliminação: $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{P}, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} & \mathbf{Q}, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}. \end{cases}$

2.31 Comutatividade da Equivalência: $\vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P})$.

2.32 Transitividade da Equivalência: $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R} \vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{R}$.

2.33 Escólio: As leis da dupla negação, contraposição, negação da implicação, negação da conjunção, De Morgan, implicação material e redução da disjunção podem ser reescritas como equivalências.

2.34 Lema da Substituição para Conectivos:
(i) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash \neg\mathbf{P_1} \leftrightarrow \neg\mathbf{P_2}$;
(ii) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{P_1} \to \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \to \mathbf{Q})$;
(iii) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{Q} \to \mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \to \mathbf{P_2})$;
(iv) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{P_1} \land \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \land \mathbf{Q})$;
(v) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{Q} \land \mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \land \mathbf{P_2})$;
(vi) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{P_1} \lor \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \lor \mathbf{Q})$;
(vii) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash (\mathbf{Q} \lor \mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \lor \mathbf{P_2})$;
(viii) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \mathbf{Q_1} \leftrightarrow \mathbf{Q_2} \vdash (\mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \to \mathbf{Q_2})$;
(ix) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \mathbf{Q_1} \leftrightarrow \mathbf{Q_2} \vdash (\mathbf{P_1} \land \mathbf{Q_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \land \mathbf{Q_2})$;
(x) $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \mathbf{Q_1} \leftrightarrow \mathbf{Q_2} \vdash (\mathbf{P_1} \lor \mathbf{Q_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_2} \lor \mathbf{Q_2})$.

O *Esquema da Substituição da Equivalência*, dado logo abaixo, é uma generalização do Lema da Substituição para Conectivos. Antes de sua formulação, precisamos de um conceito sintático, a substituição de uma fórmula por uma fórmula em uma fórmula.

2.35 Definição: As cláusulas abaixo especificam substituição de fórmulas por fórmulas:
- *A substituição de* **S** *por* **P** *em* **Q**, notada por $\mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$, é a fórmula obtida de **Q** substituindo todas as ocorrências de **S** por **P**.
- *A substituição de* **S** *por* **P** *em* $\mathbf{\Gamma}$, notada por $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$, é a coleção de fórmulas obtida de $\mathbf{\Gamma}$ substituindo todas as ocorrências de **S** por **P**.

2.36 Esquema da Substituição da Equivalência:
- $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

Leis Complementares dos Conectivos

2.37 Idempotência: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \mathbf{P} \land \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} & \vdash \mathbf{P} \lor \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}. \end{cases}$

2.38 Membros da Equivalência: $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}; \\ \text{(ii)} & \neg\mathbf{P}, \neg\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}; \\ \text{(iii)} & \mathbf{P}, \neg\mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}); \\ \text{(iv)} & \neg\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}). \end{cases}$

2.39 Equivalência Material: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}); \\ \text{(ii)} & \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}); \\ \text{(iii)} & \vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \wedge (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}); \\ \text{(iv)} & \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}). \end{cases}$

2.40 Negação da Equivalência: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}); \\ \text{(ii)} & \vdash \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\mathbf{Q}). \end{cases}$

2.41 Comutatividade: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q} \wedge \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} & \vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q} \vee \mathbf{P}; \\ \text{(iii)} & \vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P}). \end{cases}$

2.42 Associatividade: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{R}; \\ \text{(ii)} & \vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}; \\ \text{(iii)} & \vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow (\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{R}). \end{cases}$

2.43 Absorção: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} & \vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P}; \\ \text{(iii)} & \vdash \mathbf{P} \wedge (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}; \\ \text{(iv)} & \vdash \mathbf{P} \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}. \end{cases}$

2.44 Distributividade: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}); \\ \text{(ii)} & \vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R}). \end{cases}$

2.45 Importação/Exportação: $\vdash \mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}$.[10]

Abaixo são definidos dois novos conectivos de aridade zero, ou *zerários*. Como os mesmos são zerários, ambos são por si próprios fórmulas em **LPC**.

2.46 Definição: As cláusulas abaixo especificam os conectivos "$\top$" e "$\bot$":

- $\top \rightleftharpoons \mathbf{p_0} \rightarrow \mathbf{p_0}$;
- $\bot \rightleftharpoons \neg(\mathbf{p_0} \rightarrow \mathbf{p_0})$, onde $\mathbf{p_0}$ é uma letra sentencial em **LPC** escolhida arbitrariamente.

Estes conectivos também são chamados respectivamente de "*verum*" e "*falsum*".

"$\top$" denota a *veracidade* e "$\bot$" denota a *falsidade* em **LPC**.

A segunda proposição do esquema abaixo diz que toda fórmula verdadeira em um dado contexto equivale, neste contexto, a $\top$.

2.47 Veracidade: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \top; \\ \text{(ii)} & \mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \top. \end{cases}$

Analogamente, a segunda proposição do esquema abaixo diz que toda fórmula falsa em um dado contexto equivale, neste contexto, a $\bot$.

2.48 Falsidade: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \neg\bot; \\ \text{(ii)} & \neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \bot. \end{cases}$

---

[10] O esquema "$\vdash (\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R})) \rightarrow ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R})$" é chamado de *lei da importação*, enquanto que o esquema "$\vdash ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}))$" é chamado de *lei da exportação*.

Exercícios

1) Mostre que os seguintes esquemas, concernentes à *monotonicidade direta* ou *inversa* da implicação, e direta da conjunção e disjunção, são válidos na lógica proposicional clássica:

(i) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (Q \to P_1) \to (Q \to P_2)}$.
(ii) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (P_2 \to Q) \to (P_1 \to Q)}$.
(iii) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (P_1 \wedge Q) \to (P_2 \wedge Q)}$.
(iv) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (Q \wedge P_1) \to (Q \wedge P_2)}$.
(v) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (P_1 \vee Q) \to (P_2 \vee Q)}$.
(vi) $\mathbf{P_1 \to P_2 \vdash (Q \vee P_1) \to (Q \vee P_2)}$.
(vii) $\mathbf{P_1 \to P_2, Q_1 \to Q_2 \vdash (P_2 \to Q_1) \to (P_1 \to Q_2)}$.
(viii) $\mathbf{P_1 \to P_2, Q_1 \to Q_2 \vdash (P_1 \wedge Q_1) \to (P_2 \wedge Q_2)}$.
(ix) $\mathbf{P_1 \to P_2, Q_1 \to Q_2 \vdash (P_1 \vee Q_1) \to (P_2 \vee Q_2)}$.

2) Mostre que os seguintes esquemas são válidos:

(i) $\mathbf{\vdash P \leftrightarrow P}$.
(ii) $\mathbf{\vdash P \wedge (P \to Q) \to Q}$.
(iii) $\mathbf{\vdash P \to ((P \to Q) \to Q)}$.
(iv) $\mathbf{\vdash P \to (Q \to R) \leftrightarrow Q \to (P \to R)}$.
(v) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \to R \to (P \to R) \to (Q \to R)}$.
(vi) $\mathbf{\vdash ((P \to Q) \to P) \to P}$ (*Lei de Peirce*).
(vii) $\mathbf{\vdash P \vee (P \to Q)}$.
(viii) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)}$.
(ix) $\mathbf{\vdash (P \leftrightarrow Q) \vee (P \leftrightarrow R) \vee (Q \leftrightarrow R)}$.
(x) $\mathbf{\vdash P \to R \vee Q \leftrightarrow R \vee (P \to Q)}$.
(xi) $\mathbf{\vdash P \vee Q \to P \wedge Q \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)}$.
(xii) $\mathbf{\vdash ((P \to Q) \to P) \to ((P \to Q) \to Q)}$.
(xiii) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \wedge P \to (P \to Q) \wedge Q}$.
(xiv) $\mathbf{\vdash ((P \to Q) \to \neg Q) \to ((P \to Q) \to \neg P)}$.
(xv) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \wedge \neg Q \to (P \to Q) \wedge \neg P}$.
(xvi) $\mathbf{\vdash (P \leftrightarrow Q) \to P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \to Q}$.
(xvii) $\mathbf{\vdash (P \leftrightarrow Q) \wedge P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \wedge Q}$.
(xviii) $\mathbf{\vdash P \to \neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow Q \to \neg(P \leftrightarrow Q)}$.
(xix) $\mathbf{\vdash \neg(P \leftrightarrow Q) \vee P \leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q) \vee Q}$.
(xx) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)}$.
(xxi) $\mathbf{\vdash (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)}$.
(xxii) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \to (P \to R)}$.
(xxiii) $\mathbf{P \vee Q, P \to R, Q \to S \vdash R \vee S}$ (*dilema construtivo*).
(xxiv) $\mathbf{\neg R \vee \neg S, P \to R, Q \to S \vdash \neg P \vee \neg Q}$ (*dilema destrutivo*).
(xxv) $\mathbf{R \to P \vee Q, R \wedge P \leftrightarrow P', R \wedge Q \leftrightarrow Q', P' \vee Q' \leftrightarrow S \vdash R \leftrightarrow S}$ (*divisão e conquista*).
(xxvi) $\mathbf{\vdash P \to (\neg P \to Q)}$.
(xxvii) $\mathbf{\vdash (P \to \neg P) \to \neg P}$.
(xxviii) $\mathbf{\vdash (\neg P \to P) \to P}$.
(xxix) $\mathbf{\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)}$.
(xxx) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \leftrightarrow ((P \to \neg Q) \to \neg P)}$.
(xxxi) $\mathbf{\vdash (\neg P \to Q) \leftrightarrow ((\neg P \to \neg Q) \to P)}$.
(xxxii) $\mathbf{\vdash (P \to Q) \wedge (\neg P \to R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}$.
(xxxiii) $\mathbf{\vdash (P \wedge Q) \vee (R \wedge S) \leftrightarrow (P \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)}$.
(xxxiv) $\mathbf{\vdash (P \vee Q) \wedge (R \vee S) \leftrightarrow (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)}$.
(xxxv) $\mathbf{\vdash (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R) \to P \vee Q}$ (*resolução*).
(xxxvi) $\mathbf{\vdash (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee R) \to P \vee Q}$ (*resolução*).

(xxxvii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \rightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \neg\mathbf{R})$ (*resolução direta*).
(xxxviii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \rightarrow (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (*resolução direta*).
(xxxix) $\vdash (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vee \neg\mathbf{R})$ (*Lei de Gentzen*).
(xl) $\vdash (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (*Lei de Gentzen*).

3) Mostre que os seguintes esquemas, de definição de conectivos por outros conectivos, são válidos:
(i) $\vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$.
(ii) $\vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P})$.
(iii) $\vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}))$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg(\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.
(vi) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg(\mathbf{P} \rightarrow \neg\mathbf{Q})$.
(vii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg(\mathbf{Q} \rightarrow \neg\mathbf{P})$.
(viii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg(\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q})$.
(ix) $\vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg(\neg\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.

4) Mostre que as seguintes leis da *absorção* são válidas:
(i) $\vdash (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(ii) $\vdash (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(iii) $\vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.
(iv) $\vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \top$.
(vi) $\vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$.
(vii) $\vdash \mathbf{P} \wedge (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.
(viii) $\vdash \mathbf{P} \vee (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$.
(ix) $\mathbf{R} \vdash (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(x) $\neg\mathbf{R} \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.
(xi) $\mathbf{R} \vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(xii) $\neg\mathbf{R} \vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(xiii) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(xiv) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q}$.
(xv) $\vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(xvi) $\vdash (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P})$.
(xvii) $\vdash (\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(xviii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.
(xix) $\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \neg\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q}$.

5) Mostre que as seguintes leis, concernentes à *distributividade e fatorabilidade de conectivos sobre outros conectivos*, são válidas:
(i) $\vdash \neg(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \neg\mathbf{P}$.
(ii) $\vdash \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(iii) $\vdash \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \wedge (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \vee (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(v) $\vdash \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow ((\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}))$.
(vi) $\vdash \neg(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \neg\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$.
(vii) $\vdash ((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R})$.
(viii) $\vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}$.
(ix) $\vdash (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R})$.
(x) $\vdash \mathbf{R} \wedge \neg\mathbf{P} \rightarrow \neg(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P})$.
(xi) $\vdash \mathbf{R} \wedge (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{Q}$.
(xii) $\vdash \mathbf{R} \wedge (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}) \wedge (\mathbf{R} \wedge \mathbf{Q})$.
(xiii) $\vdash \mathbf{R} \wedge (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{R} \wedge \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{Q})$.
(xiv) $\vdash \neg(\mathbf{R} \vee \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{R} \vee \neg\mathbf{P}$.

(xv) $\vdash \mathbf{R} \lor (\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{R} \lor \mathbf{P} \to \mathbf{R} \lor \mathbf{Q}$.
(xvi) $\vdash \mathbf{R} \lor (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \lor \mathbf{P}) \lor (\mathbf{R} \lor \mathbf{Q})$.
(xvii) $\vdash \mathbf{R} \lor (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \lor \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{R} \lor \mathbf{Q})$.
(xviii) $\vdash (\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{P}) \land (\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \to (\mathbf{R} \leftrightarrow (\mathbf{P} \land \mathbf{Q}))$.
(xix) $\vdash (\mathbf{R} \leftrightarrow (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q})) \to (\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{P}) \lor (\mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

6) Mostre que as seguintes leis, concernentes à *distributividade e fatorabilidade degeneradas de conectivos sobre outros conectivos*, são válidas:
(i) $\vdash \mathbf{R} \to (\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \land \mathbf{P}) \to (\mathbf{R} \land \mathbf{Q})$.
(ii) $\vdash \mathbf{R} \to (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \to \mathbf{P}) \lor (\mathbf{R} \land \mathbf{Q})$.
(iii) $\vdash \mathbf{R} \to (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \land \mathbf{P}) \lor (\mathbf{R} \to \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \mathbf{R} \to (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow ((\mathbf{R} \land \mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \land \mathbf{Q}))$.
(v) $\vdash (\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \to \mathbf{R} \leftrightarrow (\mathbf{P} \lor \mathbf{R}) \land (\mathbf{Q} \to \mathbf{R})$.
(vi) $\vdash (\mathbf{P} \land \mathbf{Q}) \to \mathbf{R} \leftrightarrow (\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \lor (\mathbf{Q} \to \mathbf{R})$.
(vii) $\vdash (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \to \mathbf{R} \leftrightarrow (\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \land (\mathbf{Q} \to \mathbf{R})$.
(viii) $\vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \to \mathbf{R} \leftrightarrow ((\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \lor \mathbf{R}))$.
(ix) $\vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \to \mathbf{R} \leftrightarrow ((\mathbf{P} \lor \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \to \mathbf{R}))$.
(x) $\vdash \mathbf{R} \land (\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \to \mathbf{P}) \to (\mathbf{R} \land \mathbf{Q})$.
(xi) $\vdash \mathbf{R} \land (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{R} \land \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{R} \land \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R})$.

7) Prove as seguintes proposições concernentes à veracidade e à falsidade:
(i) $\vdash \mathbf{P} \to \top$.
(ii) $\vdash \bot \to \mathbf{P}$.
(iii) $\vdash \top \to \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(iv) $\vdash \mathbf{P} \to \bot \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \top)$.
(vi) $\vdash \neg\mathbf{P} \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \bot)$.
(vii) $\vdash \mathbf{P} \land \top \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(viii) $\vdash \mathbf{P} \land \bot \leftrightarrow \bot$.
(ix) $\vdash \mathbf{P} \lor \top \leftrightarrow \top$.
(x) $\vdash \mathbf{P} \lor \bot \leftrightarrow \mathbf{P}$.

8) Um novo conectivo diádico é definido a seguir:
- $\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

A fórmula “$\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}$” é chamada de *disjunção exclusiva (de* **P** *e* **Q***)*, e lê-se “ou **P** ou **Q**”. Declarar “ou **P** ou **Q**” significa dizer que uma, e somente uma das duas fórmulas **P** e **Q** é verdadeira. Prove as seguintes proposições:
(i) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \neg\mathbf{P}$.
(ii) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow (\neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.
(iii) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \neg(\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \leftrightarrow \neg\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}$.
(v) $\vdash \neg(\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \triangledown \neg\mathbf{Q}$.
(vi) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \land \neg(\mathbf{P} \land \mathbf{Q})$.
(vii) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \land \neg\mathbf{Q}) \lor (\neg\mathbf{P} \land \mathbf{Q})$.
(viii) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \land (\neg\mathbf{P} \lor \neg\mathbf{Q})$.
(ix) $\vdash \mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q} \triangledown \mathbf{P}$.
(x) $\vdash \mathbf{P} \triangledown (\mathbf{Q} \triangledown \mathbf{R}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \triangledown \mathbf{R}$.
(xi) $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P} \triangledown \bot$;
(xii) $\vdash \neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P} \triangledown \top$;
(xiii) $\vdash (\mathbf{P} \triangledown (\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{R})$ (*associatividade mútua*).
(xiv) $\vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow (\mathbf{Q} \triangledown \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \triangledown \mathbf{R})$ (*associatividade mútua*).
(xv) $\vdash ((\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{R}) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \triangledown \mathbf{R})$ (*intercâmbio*).
(xvi) $\vdash (\mathbf{P} \triangledown (\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R})) \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow (\mathbf{Q} \triangledown \mathbf{R}))$ (*intercâmbio*).

9) Mais um novo conectivo diádico é definido a seguir:

- $\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.

A fórmula "$\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}$" é chamada de *negação conjunta (de* **P** *e* **Q***)*, e lê-se "nem **P** nem **Q**" ou simplesmente "**P** nem **Q**"[11]. Declarar "nem **P** nem **Q**" significa dizer que ambas as fórmulas **P** e **Q** são falsas. Todos os demais conectivos podem ser definidos somente com este novo conectivo. Prove as seguintes proposições:

(i) $\vdash \neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P} \downarrow \mathbf{P}$.
(ii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{P}) \downarrow (\mathbf{Q} \downarrow \mathbf{Q})$.
(iii) $\vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}) \downarrow (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow ((\mathbf{P} \downarrow \mathbf{P}) \downarrow \mathbf{Q}) \downarrow ((\mathbf{P} \downarrow \mathbf{P}) \downarrow \mathbf{Q})$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q} \downarrow \mathbf{P}$.

10) Definimos ainda mais um novo conectivo diádico:

- $\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.

A fórmula "$\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}$" é chamada de *negação alternativa (de* **P** *e* **Q***)*. Não há uma tradução direta em língua portuguesa, daí sugiro um neologismo, a palavra "nou". Assim sendo, a fórmula "$\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}$" pode ser lida como "**P** nou **Q**"[12]. Declarar "**P** nou **Q**" significa dizer que pelo menos uma das fórmulas **P** e **Q** é falsa. Todos os demais conectivos também podem ser definidos somente com este novo conectivo. Os únicos conectivos diádicos que podem fazer isto são os dois últimos aqui definidos. Prove as seguintes proposições:

(i) $\vdash \neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P} \uparrow \mathbf{P}$.
(ii) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \uparrow (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q})$.
(iii) $\vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \leftrightarrow (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{P}) \uparrow (\mathbf{Q} \uparrow \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \uparrow (\mathbf{Q} \uparrow \mathbf{Q})$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{Q} \uparrow \mathbf{P}$.

11) Mostre que as seguintes regras derivadas de **LPC** são válidas:

(i) Se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$, então existe $\mathbf{\Gamma'}$ finito tal que $\mathbf{\Gamma'} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{P}$ (*regra da compacidade*).

(ii) Se $\begin{cases} \text{para todo } \mathbf{P} \in \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}, \\ \mathbf{\Phi} \vdash \mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}$ (*regra da transitividade geral*).

(iii) Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_1} \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_n} \end{cases}$ e $\mathbf{\Phi}, \mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n} \vdash \mathbf{Q}$, então $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi} \vdash \mathbf{Q}$ (*regra do corte*).

(iv) Se $\begin{cases} \text{para todo } \mathbf{P} \in \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}, \\ \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Delta} \vdash \mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \vdash \mathbf{Q}$ (*regra do corte geral*).

(v) Se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$, então $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$ (*regra recíproca da dedução*).

(vi) Se **P**,**P'** e **Q**,**Q'** são pares de fórmulas contraditórias, então $\begin{cases} \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q} \\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q'} \end{cases}$ implicam que $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P'}$.

12) Prove as proposições abaixo, que generalizam os esquemas do $\wedge$-introdução, do $\wedge$-eliminação, do $\vee$-introdução e da prova por casos:

(i) $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n} \vdash \mathbf{P_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{P_n}$.
(ii) $\mathbf{P_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{P_n} \vdash \mathbf{P_i}$.
(iii) $\mathbf{P_i} \vdash \mathbf{P_1} \vee \ldots \vee \mathbf{P_n}$.
(iv) $\mathbf{P_1} \vee \ldots \vee \mathbf{P_n}, \mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{R}, \ldots, \mathbf{P_n} \rightarrow \mathbf{R} \vdash \mathbf{R}$.

---

[11] Em língua inglesa "$\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}$" pode ser lido "neither **P** nor **Q**", ou simplesmente "**P** nor **Q**".

[12] Para a língua inglesa existe o neologismo "nand". Assim "$\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}$" pode ser lido "**P** nand **Q**".

13) Prove as proposições abaixo, que generalizam as leis do silogismo hipotético e da transitividade da equivalência:

(i) $\mathbf{P_1 \rightarrow P_2, \ldots, P_{n-1} \rightarrow P_n \vdash P_1 \rightarrow P_n}$.

(ii) $\mathbf{P_1 \leftrightarrow P_2, \ldots, P_{n-1} \leftrightarrow P_n \vdash P_1 \leftrightarrow P_n}$.

14) Prove as proposições abaixo, que generalizam as leis do dilema construtivo e do dilema destrutivo[13]:

(i) $\mathbf{P_1 \vee \ldots \vee P_n, P_1 \rightarrow Q_1, \ldots, P_n \rightarrow Q_n \vdash Q_1 \vee \ldots \vee Q_n}$.

(ii) $\mathbf{\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n, P_1 \rightarrow Q_1, \ldots, P_n \rightarrow Q_n \vdash \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n}$.

15) Prove a proposição abaixo, que generaliza a lei da divisão e conquista[14]:

- $\mathbf{R \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_n, R \wedge P_1 \leftrightarrow P'_1, \ldots, R \wedge P_n \leftrightarrow P'_n, P'_1 \vee \ldots \vee P'_n \leftrightarrow S \vdash R \leftrightarrow S}$.

16) Prove as proposições abaixo, que generalizam as leis de De Morgan:

(i) $\vdash \mathbf{\neg(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \leftrightarrow \neg P_1 \wedge \ldots \wedge \neg P_n}$.

(ii) $\vdash \mathbf{\neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \leftrightarrow \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n}$.

17) Prove as proposições abaixo, as quais generalizam a lei da distributividade:

(i) $\mathbf{P \wedge (Q_1 \vee \ldots \vee Q_n) \leftrightarrow (P \wedge Q_1) \vee \ldots \vee (P \wedge Q_n)}$.

(ii) $\mathbf{P \vee (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n) \leftrightarrow (P \vee Q_1) \wedge \ldots \wedge (P \vee Q_n)}$.

18) Mostre que as três proposições seguintes são equivalentes:

(i) $\mathbf{\Gamma, P_1, \ldots, P_n \vdash Q}$.

(ii) $\mathbf{\Gamma \vdash P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q}$.

(iii) $\mathbf{\Gamma \vdash P_1 \rightarrow \ldots \rightarrow P_n \rightarrow Q}$.

19) Prove a proposição abaixo, que generaliza a lei de importação / exportação:

- $\vdash \mathbf{(P_1 \rightarrow \ldots \rightarrow P_n \rightarrow Q) \leftrightarrow (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)}$.

20) Dada uma fórmula **P** e um número natural **n**, definimos a fórmula $\neg^{(n)}\mathbf{P}$ pelas cláusulas abaixo:

- $\neg^{(0)}\mathbf{P} \rightleftharpoons \mathbf{P}$;
- $\neg^{(n+1)}\mathbf{P} \rightleftharpoons \neg\neg^{(n)}\mathbf{P}$.

Prove as proposições abaixo, as quais generalizam a lei da dupla negação:

(i) $\vdash \neg^{(n)}\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$, se **n** é par.

(ii) $\vdash \neg^{(n)}\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$, se **n** é ímpar.

21) Para cada fórmula **P** em **LPC**, definimos *a fórmula dual de* **P**, $\mathbf{P_d}$, pelas cláusulas abaixo:

- $\mathbf{p_d = p}$.
- $\mathbf{(\neg P)_d = \neg(P_d)}$.
- $\mathbf{(P \rightarrow Q)_d = \neg P_d \wedge Q_d}$.
- $\mathbf{(P \wedge Q)_d = P_d \vee Q_d}$.
- $\mathbf{(P \vee Q)_d = P_d \wedge Q_d}$.

$\mathbf{\Gamma_d}$ é a coleção $\{\mathbf{P_d} \mid \mathbf{P} \in \mathbf{\Gamma}\}$.

Dada uma fórmula **P** em **LPC**, definimos *a fórmula conjugada de* **P**, $\mathbf{P_{cj}}$, substituindo cada letra sentencial em **P** juntamente com todos os sinais de negação que a precedem pela sua negação, se o número de sinais de negação for par, e pela própria letra sentencial, se o número de sinais de negação for ímpar.

$\mathbf{\Gamma_{cj}}$ é a coleção $\{\mathbf{P_{cj}} \mid \mathbf{P} \in \mathbf{\Gamma}\}$.

Mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{(P_d)_d \leftrightarrow P}$.

(ii) $\vdash \top_{\mathbf{d}} \leftrightarrow \bot$.

(iii) $\vdash \bot_{\mathbf{d}} \leftrightarrow \top$.

(iv) $\vdash \mathbf{(P \leftrightarrow Q)_d \leftrightarrow \neg(P_d \leftrightarrow Q_d)}$.

---

[13] Estas leis foram formuladas respectivamente nos exercícios 2(xv) e 2(xxv) desta seção.

[14] Esta lei foi formulada no exercício 2(xvi) desta seção.

(v) $\vdash (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})_\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{P_d} \veebar \mathbf{Q_d}$.
(vi) $\vdash (\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q})_\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{P_d} \leftrightarrow \mathbf{Q_d}$.
(vii) $(\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q})_\mathbf{d} = (\mathbf{P_d} \uparrow \mathbf{Q_d})$.
(viii) $(\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q})_\mathbf{d} = (\mathbf{P_d} \downarrow \mathbf{Q_d})$.
(ix) $\vdash (\mathbf{P_{cj}})_\mathbf{cj} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(x) $(\mathbf{P_d})_\mathbf{cj} = (\mathbf{P_{cj}})_\mathbf{d}$.
(xi) $\vdash \mathbf{P_d} \leftrightarrow \neg(\mathbf{P_{cj}})$.
(xii) $\vdash (\mathbf{P_d})_\mathbf{cj} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.
(xiii) $\Gamma \vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\neg(\Gamma_\mathbf{d}) \vdash \neg(\mathbf{P_d})$.
(xiv) Se **P** e **Q** são fórmulas contraditórias, então $\mathbf{P_{cj}}$ e $\mathbf{Q_{cj}}$ são fórmulas contraditórias.
(xv) $\Gamma \vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\Gamma_\mathbf{cj} \vdash \mathbf{P_{cj}}$.
(xvi) $\vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\vdash \neg(\mathbf{P_d})$.
(xvii) $\vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ se, e somente se, $\vdash \mathbf{Q_d} \to \mathbf{P_d}$.
(xviii) $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ se, e somente se, $\vdash \mathbf{P_d} \leftrightarrow \mathbf{Q_d}$.

22) Prove a correção em **LPC** do esquema da substituição da equivalência:

- $\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

23) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema da substituição da equivalência, considerando a definição de disjunção exclusiva, dada no exercício 8 da página 16:[15]
(i) $\vdash (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.
(ii) $\vdash (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.
(iii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \to (\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \to (\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2})$.
(iv) $\vdash (\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow (\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.
(v) $\vdash \mathbf{P} \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P} \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.
(vi) $\vdash \neg\mathbf{P} \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \neg\mathbf{P} \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.
(vii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot) \to \mathbf{P}$.
(viii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top) \to \neg\mathbf{P}$.
(ix) $\vdash \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.
(x) $\vdash \neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.
(xi) $\vdash \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.
(xii) $\vdash \neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.
(xiii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)) \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot))$.
(xiv) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot) \wedge (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)))$.
(xv) $\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{P}\|\top) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{P}\|\bot)$.
(xvi) $\mathbf{Q}(\mathbf{P}\|\top) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{P}\|\bot) \vdash \mathbf{Q}$.

24) Definimos *positividade* e *negatividade de uma dada fórmula em outra fórmula* em **LPC** pelas cláusulas abaixo:

- Se **P** não ocorre em **Q**, então **P** é tanto positivo como negativo em **Q**.
- **P** é positivo nas fórmulas **P**, $\mathbf{Q} \to \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q} \vee \mathbf{P}$.
- **P** é negativo nas fórmulas $\neg\mathbf{P}$ e $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$.
- Se **P** é positivo em **Q** e **Q** é positivo em **R**, então **P** é positivo em **R**.
- Se **P** é positivo em **Q** e **Q** é negativo em **R**, então **P** é negativo em **R**.
- Se **P** é negativo em **Q** e **Q** é positivo em **R**, então **P** é negativo em **R**.
- Se **P** é negativo em **Q** e **Q** é negativo em **R**, então **P** é positivo em **R**.

P é dito ser *estritamente positivo em* **Q** se **P** não ocorre em **Q** ou se **P** é positivo em **Q** e **P** não é negativo em **Q**. **P** é dito ser *estritamente negativo em* **Q** se **P** não ocorre em **Q** ou se **P** é negativo em **Q** e **P** não é positivo em **Q**.[16]

[15] Estes esquemas **não** são válidos, sem as devidas adaptações, para as demais lógicas clássicas apresentadas neste trabalho.
[16] Assim, se **P** não ocorrer em **Q**, então **P** é tanto estritamente positivo como estritamente negativo em **Q**; esta é a única situação em que estas duas propriedades podem concorrer.

Baseado nos esquemas da contraposição e da monotonicidade (do ex. 1), prove os seguintes *esquemas da substituição da implicação*[17]:
(i) Se **S** é estritamente positivo em **Q**, então $\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.
(ii) Se **S** é estritamente negativo em **Q**, então $\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

25) Considerando que **S** é estritamente positivo em **Q**, mostre que:
(i) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$.
(ii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.
(iii) $\vdash ((\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})) \to ((\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}))$.
(iv) $\vdash (\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \to (\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

26) Considerando que **S** é estritamente negativo em **Q**, mostre que:
(i) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.
(ii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$.
(iii) $\vdash ((\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})) \to ((\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}))$.
(iv) $\vdash (\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \to (\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

27) Mostre que $\Gamma \vdash \mathbf{P}$ implica que $\Gamma(\mathbf{p}\|\mathbf{S}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{p}\|\mathbf{S})$ (*lei da substituição uniforme*).

28) Prove a validade em **LPC** das seguintes conseqüências da lei da substituição uniforme:

(i) Se $\begin{cases} \mathbf{P} \text{ e } \mathbf{Q} \text{ possuem pelo menos uma letra sentencial em comum,} \\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \end{cases}$

então existe **R** tal que $\begin{cases} \text{toda letra sentencial de } \mathbf{R} \text{ ocorre em } \mathbf{P} \text{ e em } \mathbf{Q}, \\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{R}, \\ \mathbf{R} \vdash \mathbf{Q} \end{cases}$ (*lei da interpolação*).

(ii) Se $\begin{cases} \mathbf{P} \text{ e } \mathbf{Q} \text{ não possuem nenhuma letra sentencial em comum,} \\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \end{cases}$

então **P** é trivial em **LPC** ou **Q** é uma tese de **LPC**.

29) Considere "#" um conectivo diádico primitivo ou definido.
Se "#" é distinto do conectivo da implicação, definimos a sua *aplicação sobre uma lista finita de duas ou mais fórmulas*:
- $\#(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \rightleftharpoons \mathbf{P} \# \mathbf{Q}$;
- $\#(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{n+1}}) \rightleftharpoons \#(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \# \mathbf{P_{n+1}}$, onde $\mathbf{n} \geq 2$.

Dada uma lista de fórmulas $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma fórmula **Q**, definimos duas formas de concatenação:
- $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) + \mathbf{Q} \rightleftharpoons (\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q})$;
- $\mathbf{Q} + (\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \rightleftharpoons (\mathbf{Q},\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$.

Dada uma lista de fórmulas $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma fórmula $\mathbf{P_i}$ desta lista, notamos a lista obtida da lista original retirando $\mathbf{P_i}$ da mesma por $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) - \mathbf{P_i}$, conforme é definido abaixo:
- $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) - \mathbf{P_i} \rightleftharpoons (\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}},\ldots,\mathbf{P_n})$.

Definimos *permutação de uma lista de fórmulas* pelas seguintes cláusulas:
- () é uma permutação de ()[18].
- Se $\mathbf{\Theta}$ é uma permutação de $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}},\ldots,\mathbf{P_n})$, então $\mathbf{\Theta} + \mathbf{P_i}$ é uma permutação de $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$.

Definimos #-*junção de uma lista de duas ou mais fórmulas* pelas seguintes cláusulas:
- A fórmula $\mathbf{P_1} \# \mathbf{P_2}$ é a #-junção da lista $(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2})$ de duas fórmulas.
- Se **R**,**S** são respectivamente #-junções das listas de fórmulas $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e $(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_r})$, então $\mathbf{R} \# \mathbf{S}$ é uma #-junção da lista $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_r})$.

Considerando $\mathbf{n} \geq 2$, prove as seguintes proposições:
(i) Se "#" é associativo e comutativo[19], e $(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}})$ é uma permutação de $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$, então $\vdash \#(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}}) \leftrightarrow \#(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ (*lei da comutatividade generalizada*).

---

[17] Desta forma os mesmos não valem nas extensões quantificacionais usuais de **LPC**; para valerem por exemplo na lógica quantificacional clássica são necessárias algumas adaptações.
[18] Isto é, a lista vazia de fórmulas é uma permutação dela própria.
[19] Isto é, $\vdash (\mathbf{P} \# (\mathbf{Q} \# \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \# \mathbf{Q}) \# \mathbf{R})$ e $\vdash (\mathbf{P} \# \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \# \mathbf{P})$.

(ii) Se "#" é associativo[20] e $\mathbf{R}$ é uma #-junção da lista $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$, então $\vdash \mathbf{R} \leftrightarrow \#(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ (*lei da associatividade generalizada*).
(iii) Se "#" é associativo e comutativo, e $\mathbf{R}$ é uma #-junção de uma permutação da lista $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$, então $\vdash \mathbf{R} \leftrightarrow \#(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ (*lei da associatividade e da comutatividade generalizada*).

30) Defina recursivamente uma função **eli** tal que, dada uma fórmula $\mathbf{P}$ em **LPC**, $\mathbf{eli}(\mathbf{P})$ é uma fórmula em **LPC** obtida de $\mathbf{P}$ na qual não existe nenhuma ocorrência do conectivo "$\rightarrow$" e $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{eli}(\mathbf{P})$.

31) Defina recursivamente uma função **nls** tal que, dada uma fórmula $\mathbf{P}$ em **LPC**, $\mathbf{nls}(\mathbf{P})$ é uma fórmula em **LPC** obtida de $\mathbf{P}$ na qual todas as suas subfórmulas que forem negações são negações de letras sentenciais e $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{nls}(\mathbf{P})$.

32) Definimos *conjunção de uma lista de fórmulas*, incluindo as listas vazia e de um só componente, pelas cláusulas abaixo:
- $\bigwedge() \risingdotseq \top$;
- $\bigwedge(\mathbf{P_1}) \risingdotseq \mathbf{P_1}$;
- $\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{n+1}}) \risingdotseq \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \wedge \mathbf{P_{n+1}}$, onde $\mathbf{n} \geq 1$.

A fórmula "$\top$" é chamada de *conjunção vazia* ou 0-*conjunção*. Uma fórmula distinta de "$\top$" que não é uma conjunção é também dita uma 1-*conjunção*. Se $\mathbf{P_1}$ não é uma conjunção, então a fórmula "$\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$", onde $\mathbf{n} \geq 2$, é dita uma **n**-*conjunção*.
Se todos os conjuntores de uma **n**-conjunção pertencerem a $\mathbf{\Gamma}$, então esta é dita uma **n**-*conjunção em* $\mathbf{\Gamma}$. Uma fórmula é dita uma *conjunção em* $\mathbf{\Gamma}$ se existe **n** tal que esta é uma **n**-conjunção em $\mathbf{\Gamma}$. Uma (**n**-)*conjunção de elementos de* $\mathbf{\Gamma}$ é uma (**n**-)conjunção em $\mathbf{\Gamma}$; tais elementos de $\mathbf{\Gamma}$ também são ditos *conjuntores da* (**n**-)conjunção.
Considerando $\mathbf{n} \geq 0$ e $1 \leq \mathbf{i,j} \leq \mathbf{n}$ (para $\mathbf{n} \geq 1$), prove as seguintes proposições:
(i) Se $(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}})$ é uma permutação de $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$, então $\vdash \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bigwedge(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}})$.
(ii) Para toda fórmula $\mathbf{P}$, existe um único natural **n** e únicos conjuntores $\mathbf{C_1},\ldots,\mathbf{C_n}$ tal que $\mathbf{P}$ é a **n**-conjunção dos conjuntores $\mathbf{C_1},\ldots,\mathbf{C_n}$.
(iii) $\mathbf{P_i} \vdash \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}},\mathbf{P_n})$.
(iv) $\neg\mathbf{P_i} \vdash \neg\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$.
(v) $\neg\mathbf{P_i} \vdash \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bot$.
(vi) Se $\mathbf{P_i}$ e $\mathbf{P_j}$ são fórmulas contraditórias, então $\begin{cases} \vdash \neg\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}), \\ \vdash \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bot. \end{cases}$

33) Dadas uma **n**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma **p**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, a sua *soma conjuntiva*, notada por $\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \oplus_c \bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, é a **n+p**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$.[21]
Mostre que:
(i) $\vdash \mathbf{P} \oplus_c \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.
(ii) A soma conjuntiva de duas conjunções em $\mathbf{\Gamma}$ é uma conjunção em $\mathbf{\Gamma}$.

34) Definimos *disjunção de uma lista de fórmulas*, incluindo as listas vazia e de um só componente, pelas cláusulas abaixo:
- $\bigvee() \risingdotseq \bot$;
- $\bigvee(\mathbf{P_1}) \risingdotseq \mathbf{P_1}$;
- $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{n+1}}) \risingdotseq \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \vee \mathbf{P_{n+1}}$, onde $\mathbf{n} \geq 1$.

A fórmula "$\bot$" é chamada de *disjunção vazia* ou 0-*disjunção*. Uma fórmula distinta de "$\bot$" que não é uma disjunção é também dita uma 1-*disjunção*. Se $\mathbf{P_1}$ não é uma disjunção, então a fórmula "$\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$", onde $\mathbf{n} \geq 2$, é dita uma **n**-*disjunção*.
Se todos os disjuntores de uma **n**-disjunção pertencerem a $\mathbf{\Gamma}$, então esta é dita uma **n**-*disjunção em* $\mathbf{\Gamma}$. Uma fórmula é dita uma *disjunção em* $\mathbf{\Gamma}$ se existe **n** tal que esta é uma **n**-disjunção em $\mathbf{\Gamma}$.

[20] Isto é, $\vdash (\mathbf{P} \# (\mathbf{Q} \# \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \# \mathbf{Q}) \# \mathbf{R})$.
[21] A soma conjuntiva é definida para qualquer par de fórmulas em **LPC**.

Uma (**n**-)*disjunção de elementos de* Γ é uma (**n**-)disjunção em Γ; tais elementos de Γ também são ditos *disjuntores da* (**n**-)disjunção.
Considerando $\mathbf{n} \geq 0$ e $1 \leq \mathbf{i,j} \leq \mathbf{n}$ (para $\mathbf{n} \geq 1$), prove as seguintes proposições:

(i) Se $(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}})$ é uma permutação de $(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$, mostre que $\vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bigvee(\mathbf{P_{i_1}},\ldots,\mathbf{P_{i_n}})$.
(ii) Para toda fórmula **P**, existe um único natural **n** e únicos disjuntores $\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_n}$ tal que **P** é a **n**-disjunção dos disjuntores $\mathbf{D_1},\ldots,\mathbf{D_n}$.
(iii) $\mathbf{P_i} \vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$.
(iv) $\mathbf{P_i} \vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \top$.
(v) $\neg\mathbf{P_i} \vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}},\mathbf{P_n})$.
(vi) Se $\mathbf{P_i}$ e $\mathbf{P_j}$ são fórmulas contraditórias, então $\begin{cases} \vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}), \\ \vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \leftrightarrow \top. \end{cases}$

35) Dadas uma **n**-disjunção $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma **p**-disjunção $\bigvee(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, a sua *soma disjuntiva*, notada por $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \oplus_\mathbf{d} \bigvee(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, é a **n+p**-disjunção $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$.[22]
Mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{P} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$.
(ii) A soma disjuntiva de duas disjunções em Γ é uma disjunção em Γ.

36) Considerando $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$ e $\mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}$ tais que $\mathbf{P_i}$ e $\mathbf{Q_j}$ são fórmulas contraditórias, mostre que:

(i) $\vdash \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \wedge \bigvee(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p}) \rightarrow \bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}}\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_{j-1}},\mathbf{Q_{j+1}}\ldots,\mathbf{Q_p})$ (*lei da resolução*);
(ii) $\vdash \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{i-1}},\mathbf{P_{i+1}}\ldots,\mathbf{P_n},\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_{j-1}},\mathbf{Q_{j+1}}\ldots,\mathbf{Q_p}) \rightarrow \bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \vee \bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$ (*lei da resolução direta*).

37) Dadas uma **n**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma **p**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, e considerando $\mathbf{div}(\mathbf{i},\mathbf{p})$ e $\mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p})$ respectivamente como o quociente e o resto da divisão inteira de **i** por **p**, definimos o seu *produto conjuntivo*, notado por $\bigwedge(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \otimes_\mathbf{c} \bigwedge(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, como sendo a **np**-conjunção $\bigwedge(\mathbf{R_1},\ldots,\mathbf{R_{np}})$, onde, se $\mathbf{n} \neq 0$ e $\mathbf{p} \neq 0$, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{np}\}$, $\mathbf{R_i}$ é especificado pela cláusula abaixo:[23,24]

- $\mathbf{R_i} = \begin{cases} \mathbf{P_{div(i,p)}} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_p}, \text{ se } \mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p}) = 0; \\ \mathbf{P_{div(i,p)+1}} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_{mod(i,p)}}, \text{ se } \mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p}) \neq 0. \end{cases}$

Mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{P} \otimes_\mathbf{c} \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$.
(ii) O produto conjuntivo de duas conjunções de disjunções em Γ é uma conjunção de disjunções em Γ.

38) Dadas uma **n**-disjunção $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n})$ e uma **p**-disjunção $\bigvee(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, e considerando $\mathbf{div}(\mathbf{i},\mathbf{p})$ e $\mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p})$ respectivamente como o quociente e o resto da divisão inteira de **i** por **p**, definimos o seu *produto disjuntivo*, notado por $\bigvee(\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}) \otimes_\mathbf{d} \bigvee(\mathbf{Q_1},\ldots,\mathbf{Q_p})$, como sendo a **np**-disjunção $\bigvee(\mathbf{R_1},\ldots,\mathbf{R_{np}})$, onde, se $\mathbf{n} \neq 0$ e $\mathbf{p} \neq 0$, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{np}\}$, $\mathbf{R_i}$ é especificado pela cláusula abaixo:[25,26]

- $\mathbf{R_i} = \begin{cases} \mathbf{P_{div(i,p)}} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_p}, \text{ se } \mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p}) = 0; \\ \mathbf{P_{div(i,p)+1}} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_{mod(i,p)}}, \text{ se } \mathbf{mod}(\mathbf{i},\mathbf{p}) \neq 0. \end{cases}$

---

[22] A soma disjuntiva é definida para qualquer par de fórmulas em **LPC**.
[23] Por exemplo, se $\bigwedge(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2})$ e $\bigwedge(\mathbf{Q_1},\mathbf{Q_2},\mathbf{Q_3})$ são respectivamente uma 2-conjunção e uma 3-conjunção, então $\bigwedge(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}) \otimes_\mathbf{c} \bigwedge(\mathbf{Q_1},\mathbf{Q_2},\mathbf{Q_3}) = \bigwedge(\mathbf{P_1} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_1},\mathbf{P_1} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_2},\mathbf{P_1} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_3},\mathbf{P_2} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_1},\mathbf{P_2} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_2},\mathbf{P_2} \oplus_\mathbf{d} \mathbf{Q_3})$.
[24] O produto conjuntivo é definido para qualquer par de fórmulas em **LPC**.
[25] Por exemplo, se $\bigvee(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2},\mathbf{P_3})$ e $\bigvee(\mathbf{Q_1},\mathbf{Q_2})$ são respectivamente uma 3-disjunção e uma 2-disjunção, então $\bigvee(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2},\mathbf{P_3}) \otimes_\mathbf{d} \bigvee(\mathbf{Q_1},\mathbf{Q_2}) = \bigvee(\mathbf{P_1} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_1},\mathbf{P_1} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_2},\mathbf{P_2} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_1},\mathbf{P_2} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_2},\mathbf{P_3} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_1},\mathbf{P_3} \oplus_\mathbf{c} \mathbf{Q_2})$.
[26] O produto disjuntivo é definido para qualquer par de fórmulas em **LPC**.

Mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{d}} \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.

(ii) O produto disjuntivo de duas disjunções de conjunções em $\mathbf{\Gamma}$ é uma disjunção de conjunções em $\mathbf{\Gamma}$.

39) Um *literal* é uma letra sentencial ou uma negação de letra sentencial. Uma *cláusula disjuntiva* é uma disjunção de literais. Uma *cláusula conjuntiva* é uma conjunção de literais. Uma *fórmula conjuntiva normal* é uma conjunção não vazia de cláusulas disjuntivas. Uma *fórmula disjuntiva normal* é uma disjunção não vazia de cláusulas conjuntivas.

(i) Mostre que:
   (a) A soma conjuntiva de conjunções de cláusulas disjuntivas é uma conjunção de cláusulas disjuntivas.
   (b) O produto conjuntivo de conjunções de cláusulas disjuntivas é uma conjunção de cláusulas disjuntivas.
   (c) A soma disjuntiva de disjunções de cláusulas conjuntivas é uma disjunção de cláusulas conjuntivas.
   (d) O produto disjuntivo de disjunções de cláusulas conjuntivas é uma disjunção de cláusulas conjuntivas.

(ii) Dada uma fórmula **P** em **LPC**, considere definidos $\mathbf{P_d}$ e $\mathbf{P_{cj}}$ tal como no exercício 21 desta série. Mostre que:
   (a) Se **P** é uma fórmula conjuntiva normal, então $(\mathbf{P_d})_{\mathbf{cj}}$ é uma fórmula disjuntiva normal e $\vdash (\mathbf{P_d})_{\mathbf{cj}} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.
   (b) Se **P** é uma fórmula disjuntiva normal, então $(\mathbf{P_d})_{\mathbf{cj}}$ é uma fórmula conjuntiva normal e $\vdash (\mathbf{P_d})_{\mathbf{cj}} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.

(iii) Considerando as definições contidas nos exercícios precedentes desta série, defina recursivamente:
   (a) uma função, aqui denominada **fcn**, que associa a cada fórmula **P** em **LPC** uma fórmula conjuntiva normal **fcn**(**P**), tal que $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{fcn}(\mathbf{P})$;
   (b) uma função, aqui denominada **fdn**, que associa a cada fórmula **P** em **LPC** uma fórmula disjuntiva normal **fdn**(**P**), tal que $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{fdn}(\mathbf{P})$.

3. A LÓGICA QUANTIFICACIONAL CLÁSSICA

Este capítulo apresenta a *Lógica Quantificacional Clássica*, ou simplesmente **LQC**. Esta lógica estuda as propriedades clássicas dos conectivos e de certas variações internas em fórmulas, expressas pelos *quantificadores*.

Todas as convenções e definições dadas anteriormente continuam valendo neste capítulo, com as devidas adaptações, sempre que necessário.

§1. Linguagens para a Lógica Quantificacional Clássica

1.1 Definição: Um *alfabeto quantificacional* contém os seguintes tipos de sinais, mutuamente disjuntos dois a dois:

- *constantes* – são nomes de objetos definidos do universo de discurso. – A coleção de constantes pode ser eventualmente vazia.
- *variáveis* – são nomes de objetos em geral indefinidos do universo de discurso ou expressam alguma quantificação; juntamente com as constantes, constituem a coleção dos *termos atômicos*[27] em uma lógica quantificacional. – A coleção de variáveis deve ser infinitamente enumerável. Adotamos como variáveis as letras **x**,**y**,**z**,**w**, seguidas ou não de subíndices: $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1,\mathbf{w}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_2,\mathbf{w}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_3,\mathbf{z}_3,\mathbf{w}_3,\ldots$
- *sinais funcionais* – formam termos a partir de uma lista não vazia de termos[28]; se um sinal funcional usa **n** termos para formar um termo, dizemos que **n** é uma *aridade*[29] *deste sinal*. – A coleção de sinais funcionais pode ser eventualmente vazia.
- *sinais predicativos* – formam fórmulas a partir de uma lista eventualmente vazia de termos; se um sinal predicativo usa **n** termos para formar uma fórmula, dizemos que **n** é uma *aridade*[30] *deste sinal*.[31] – Todo alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um sinal predicativo.
- *conectivos* – formam fórmulas a partir de fórmulas; se um conectivo usa **n** fórmulas para formar uma fórmula, dizemos que **n** é a *aridade* deste sinal; os conectivos são em geral de aridades 1 ou 2. – Todo alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um conectivo.
- *quantificadores* – formam fórmulas a partir de listas não vazias de variáveis e de fórmulas. – Os quantificadores mais comuns só utilizam uma variável e uma fórmula. Todo alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um quantificador.
- *sinais de pontuação* – são "(" – o parêntese de abertura, ")" – o parêntese de fechamento, e "," – a vírgula.

Estendemos abaixo a definição 2.1.2, considerando também, além das aridades de conectivos, as aridades de sinais funcionais e de sinais predicativos.

1.2 Definição: Seja ***s*** um conectivo, um sinal funcional ou um sinal predicativo. Se ***s*** possui aridade **n**, dizemos também que ***s*** é **n**-*ário* ou **n**-*ádico*. Se ***s*** possui uma das aridades 1, 2 ou 3, então ***s*** é também chamado respectivamente de *monádico*, *diádico* ou *triádico*.

1.3 Definição: Os dois quantificadores mais comuns são:

- "$\forall$", dito o *quantificador universal*;
- "$\exists$", dito o *quantificador existencial*.

1.4 Definição: Um *alfabeto para* **LQC** é um alfabeto quantificacional possuindo os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", e os quantificadores "$\forall$" e "$\exists$".

---

[27] São termos que não contém outros termos.
[28] Pode-se também dizer que as constantes são sinais funcionais de aridade 0, isto é, formam termos a partir de uma lista vazia de termos.
[29] Admitimos que cada sinal funcional possa possuir mais de uma aridade.
[30] Admitimos que cada sinal predicativo possa possuir mais de uma aridade.
[31] Os sinais predicativos de aridade zero são também chamados de *letras sentenciais*.

1.5 Definição: As cláusulas abaixo especificam os *termos* e *fórmulas em* **LQC** com respeito a um dado alfabeto:

- Toda constante deste alfabeto é um termo em **LQC**, dito um *termo atômico*.
- Toda variável é um termo em **LQC**, dito um *termo atômico*.
- Se **f** é um sinal funcional deste alfabeto de aridade **n** e $\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}$ são termos em **LQC**, então $\mathbf{f}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n})$ é um termo em **LQC**, dito um *termo funcional*.
- Se **p** é um sinal predicativo de aridade **n** e $\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}$ são termos, então $\mathbf{p}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n})$ é uma fórmula em **LQC**, dita *fórmula atômica*.
- Se **P** é uma fórmula, então $\neg\mathbf{P}$ é uma fórmula em **LQC**.
- Se **P** e **Q** são fórmulas, então $(\mathbf{P} \to \mathbf{Q})$, $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ são fórmulas em **LQC**.
- Se ***x*** é uma variável e **P** é uma fórmula, então:
    - $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$ é uma fórmula, dita *fórmula universal*, cujo *corpo* é **P**.
    - $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$ é uma fórmula, dita *fórmula existencial*, cujo *corpo* é **P**.

1.6 Notação: Além das convenções estabelecidas em 2.3.5, as seguintes referências adicionais serão usadas, para as listas de letras descritas abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices, a não ser que o contrário seja dito:

a, **b**, **c** – referem-se a constantes;
x, ***y***, ***z***, ***w*** – referem-se a variáveis[32];
f, **g**, **h** – referem-se a sinais funcionais;
p, **q**, **r** – referem-se a sinais predicativos;
t, **u**, **v** – referem-se a termos.

1.7 Notação: A partir de agora, a menos que o contrário seja dito, adotamos as seguintes convenções adicionais:

- As letras $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Upsilon}$, seguidas ou não de subíndices, referem-se a um dos quantificadores "$\forall$" ou "$\exists$".
- Quando $\boldsymbol{\Psi}'$ aparecer no mesmo contexto que $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Psi}' = \begin{cases} \exists, \text{ se } \boldsymbol{\Psi} = \forall \\ \forall, \text{ se } \boldsymbol{\Psi} = \exists \end{cases}$, e $\boldsymbol{\Upsilon}'$ é definido analogamente.
- O mesmo vale para $\boldsymbol{\Psi}'_\mathbf{i}$ e $\boldsymbol{\Upsilon}'_\mathbf{i}$, quando aparecerem respectivamente no mesmo contexto que $\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{i}$ e $\boldsymbol{\Upsilon}_\mathbf{i}$, onde **i** é um inteiro positivo.

1.8 Escrita informal de termos e fórmulas em LQC: Além das convenções estipuladas em 2.1.10, adotamos as seguintes convenções adicionais, que podem ser adotadas desde que não haja margem para quaisquer confusões:

- Se **f** é um sinal funcional monádico de escrita pré-fixada, notamos **f**(**t**) por (**ft**). Quando (**ft**) não está no interior de outro termo, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.[33]
- Se **f** é um sinal funcional monádico de escrita pós-fixada, notamos **f**(**t**) por (**tf**). Quando (**tf**) não está no interior de outro termo, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.[34]
- Se **f** é um sinal funcional diádico, notamos $\mathbf{f}(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2})$ por $(\mathbf{t_1}\ \mathbf{f}\ \mathbf{t_2})$. Quando $(\mathbf{t_1}\ \mathbf{f}\ \mathbf{t_2})$ não estiver escrito como subtermo de outro termo, podemos prescindir do par exterior de parênteses.[35]
- Quando o mesmo sinal funcional diádico se suceder em um termo, podemos suprimir no mesmo todos os pares internos de parênteses, considerando a parentetização implícita da esquerda para a direita.[36]

---

[32] Ou seja, as letras latinas minúsculas ***x***,***y***,***z***,***w***, escritas em negrito e itálico, seguidas ou não de plicas ou subíndices, são nomes de variáveis, as quais são as letras latinas minúsculas **x**,**y**,**z**,**w**, escritas em negrito e aprumadas, seguidas ou não de subíndices. Daí não pode haver confusão entre as próprias variáveis e os nomes das mesmas.

[33] Por exemplo, as samblagens "(–***x***)" e "(+***y***)" representam respectivamente os termos "–(***x***)" e "+(***y***)". Quando "(–***x***)" e "(+***y***)" não estiverem dentro de outro termo, os mesmos podem ser escritos como "–***x***" e "+***y***".

[34] Por exemplo, se ***x*** denota um número natural, notamos o fatorial de ***x*** como "(***x***!)". Se "(***x***!)" não está no interior de outro termo, o mesmo pode ser escrito como "***x***!".

[35] Por exemplo, a samblagem "(***x*** + ***y***)" representa o termo "+(***x***,***y***)". Se "(***x*** + ***y***)" não está no interior de outro termo, este pode ser escrito como "***x*** + ***y***".

[36] Por exemplo, a samblagem "***x*** + ***y*** + ***z*** + ***w***" representa o termo "((***x*** + ***y***) + ***z***) + ***w***".

- Se **p** é um sinal predicativo de aridade **2**, notamos $\mathbf{p(t_1,t_2)}$ por $(\mathbf{t_1\ p\ t_2})$. Quando $(\mathbf{t_1\ p\ t_2})$ não estiver escrito como subfórmula de outra fórmula, podemos prescindir do par exterior de parênteses.[37]
- Quando $(\mathbf{t_1\ p\ t_2})$ for um dos componentes de uma fórmula formada por um conectivo diádico, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.[38]

1.9 Leitura de fórmulas formadas com quantificadores:

- "$\forall \boldsymbol{x}$ **P**" pode ser lido de uma das seguintes formas:
  - "*Para todo* $\boldsymbol{x}$, **P**".
  - "*Para cada* $\boldsymbol{x}$, **P**".
  - "*Para qualquer* $\boldsymbol{x}$, **P**".
  - "*Qualquer que seja* $\boldsymbol{x}$, **P**".
- "$\exists \boldsymbol{x}$ **P**" pode ser lido de uma das seguintes formas:
  - "*Existe* $\boldsymbol{x}$ *tal que* **P**".
  - "*Existe pelo menos um* $\boldsymbol{x}$ *tal que* **P**".
  - "*Para algum* $\boldsymbol{x}$, **P**".

Existem dois sinais predicativos de aridade 2 especialmente importantes, respectivamente para a *Lógica Equacional* e a *Teoria dos Conjuntos*, a saber:

- "=" – "$\mathbf{t = u}$" é lido como "**t** é igual a **u**" ou "**t** é idêntico a **u**";
- "$\in$" – "$\mathbf{t} \in \mathbf{A}$" é lido como "**t** pertence à coleção **A**".

1.10 Definição: Um designador em **LQC** é um termo ou uma fórmula em **LQC**.

1.11 Notação: No restante deste capítulo, a letra **D**, seguida ou não de plicas ou subíndices, refere-se a um designador em **LQC**, a menos que seja dito o contrário.

Abaixo é formulada em termos precisos a não ambigüidade concernente a qualquer linguagem para **LQC**.

1.12 Teorema da Legibilidade Única: Cada termo e cada fórmula em **LQC** só podem ser lidos de uma única forma, isto é:

- As coleções de constantes, variáveis, termos funcionais, fórmulas atômicas, negações, implicações, conjunções, disjunções, fórmulas universais e fórmulas existenciais são duas a duas disjuntas.
- Se $\mathbf{f(t_1,\ldots,t_n)}$ e $\mathbf{g(u_1,\ldots,u_p)}$ são termos funcionais idênticos, então $\mathbf{f = g}$, $\mathbf{n = p}$ e, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $\mathbf{t_i = u_i}$.
- Se $\mathbf{p(t_1,\ldots,t_n)}$ e $\mathbf{q(u_1,\ldots,u_p)}$ são fórmulas atômicas idênticas, então $\mathbf{p = q}$, $\mathbf{n = p}$ e, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $\mathbf{t_i = u_i}$.
- Se $\neg\mathbf{P}$ e $\neg\mathbf{Q}$ são negações idênticas, então $\mathbf{P = Q}$.
- Se $(\mathbf{P} \to \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \to \mathbf{S})$ são implicações idênticas, então $\mathbf{P = R}$ e $\mathbf{Q = S}$.
- Se $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \wedge \mathbf{S})$ são conjunções idênticas, então $\mathbf{P = R}$ e $\mathbf{Q = S}$.
- Se $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{R} \vee \mathbf{S})$ são disjunções idênticas, então $\mathbf{P = R}$ e $\mathbf{Q = S}$.
- Se $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ e $\forall \boldsymbol{y}\ \mathbf{Q}$ são fórmulas universais idênticas, então $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ e $\mathbf{P = Q}$.
- Se $\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ e $\exists \boldsymbol{y}\ \mathbf{Q}$ são fórmulas existenciais idênticas, então $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ e $\mathbf{P = Q}$.

Existem dois conceitos sintáticos essenciais para a formulação de regras para uma lógica quantificacional: a condição de uma dada *variável* ser *livre em uma fórmula*, e *instanciação de uma variável por um termo em uma fórmula*.

---

[37] Por exemplo, a samblagem "$(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A})$" representa a fórmula "$\in(\boldsymbol{x},\mathbf{A})$". Se "$(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A})$" não está no interior de outra fórmula, esta pode ser escrita como "$\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}$".

[38] Por exemplo, a samblagem "$\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \to \boldsymbol{x} \in \mathbf{B}$" representa a fórmula "$(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}) \to (\boldsymbol{x} \in \mathbf{B})$". No entanto, quando $(\mathbf{t_1\ p\ t_2})$ for uma fórmula negada ou for o corpo de uma fórmula universal ou existencial, o par exterior de parênteses é indispensável para uma boa legibilidade da fórmula completa. Por exemplo, nas fórmulas $\neg(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A})$ e $\exists \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{A})$, se fosse suprimido o par exterior de parênteses de "$(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A})$", o resultado seriam as expressões "$\neg\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}$" e "$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{A}$", as quais não apresentam uma boa legibilidade.

1.13 Definição: Uma *ocorrência de uma variável* em um termo ou uma fórmula é uma cópia específica da mesma neste termo ou fórmula.[39] Todas as *ocorrências de uma variável* em um termo são ditas serem *livres neste termo*.[40] Uma *ocorrência de uma variável* $\boldsymbol{x}$ em uma fórmula **P** é dita ser *ligada em* **P** se esta figurar em uma subfórmula de **P** de uma das formas $\forall \boldsymbol{x}$ **Q** ou $\exists \boldsymbol{x}$ **Q**; caso contrário esta *ocorrência* é dita ser *livre em* **P**.

1.14 Definição: Uma *variável* é dita ser *livre em um termo* se esta possuir pelo menos uma ocorrência neste termo.[41] Uma *variável* é dita ser *ligada em uma fórmula* se esta possuir pelo menos uma ocorrência ligada nesta fórmula. Da mesma forma, uma *variável* é dita ser *livre em uma fórmula* se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre nesta fórmula. Uma *variável* é dita ser *livre em uma coleção de designadores* se ela for livre em pelo menos um elemento desta coleção.

Se $\boldsymbol{x}$ é livre em uma fórmula **P**, isto significa, intuitivamente, que **P** *fala do* objeto designado por $\boldsymbol{x}$ através de suas ocorrências livres em **P**. Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em **P**, então **P** *não fala do* objeto designado por $\boldsymbol{x}$ através de suas ocorrências livres em **P**, mesmo que $\boldsymbol{x}$ ocorra em **P**. Por exemplo, considere a fórmula $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z} \wedge \text{par}(\boldsymbol{x}^2) \rightarrow \text{par}(\boldsymbol{x}))$. Esta fórmula não fala do objeto designado por $\boldsymbol{x}$ através de suas ocorrências livres, pelo fato de que $\boldsymbol{x}$ não é livre na mesma; podemos reescrevê-la por "$\forall \boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} \wedge \text{par}(\boldsymbol{y}^2) \rightarrow \text{par}(\boldsymbol{y}))$", sem alterar o seu significado original. Temos assim que a fórmula $\forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z} \wedge \text{par}(\boldsymbol{x}^2) \rightarrow \text{par}(\boldsymbol{x}))$ não possui essencialmente nenhuma relação especial com a variável $\boldsymbol{x}$.

O conceito de *instanciação de variáveis por termos* é essencial para a formulação de três das quatro *leis de introdução e eliminação de quantificadores*, as quais integram a definição do cálculo de seqüentes para **LQC**, dado na seção seguinte.

Queremos definir a *instanciação de* $\boldsymbol{x}$ *por* **t** *em* **P**, que passaremos a notar por $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, de modo que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$ fale do objeto designado por **t** através de todas as novas ocorrências de **t** em $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, da mesma forma que **P** fala do objeto designado por $\boldsymbol{x}$. A partir do que foi dito há pouco, poderíamos definir $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$ como sendo a fórmula obtida de **P** substituindo todas as ocorrências livres de $\boldsymbol{x}$ por **t**. Tal definição leva a certos problemas, como veremos a seguir. Por exemplo, sabemos que, em um *universo de discurso*[42] com pelo menos dois objetos, considerando a interpretação usual para o sinal "$\neq$", a fórmula $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ é verdadeira, isto é, para qualquer objeto **x** temos que $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$, daí a fórmula $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ deveria continuar a ser verdadeira se nela a variável **x** for instanciada por um termo qualquer. Se instanciarmos **x** por **y** em $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ segundo esta nossa primeira abordagem, concluiríamos erradamente que $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{y})$ é verdadeiro, o que é absurdo. O problema todo se origina de instanciar **x** por uma ocorrência de **y** que passou a ser ligada na fórmula $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{y})$, o que altera completamente a estrutura da fórmula original. Para contornar isto, podemos observar que a fórmula $\exists \mathbf{z}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{z})$ é equivalente à fórmula original $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$, dada inicialmente, no sentido que a segunda afirma exatamente o que dizia a primeira. Assim, para instanciar **x** por **y** em $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$, devemos primeiro alterar a variável quantificada na fórmula original para uma nova variável não ocorrendo nem na fórmula $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ nem no termo **y**, a qual pode ser a variável **z**, obtendo assim a fórmula $\exists \mathbf{z}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{z})$. Instanciando **x** por **y** nesta nova fórmula, obtemos a fórmula $\exists \mathbf{z}\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{z})$, a qual é obviamente verdadeira no contexto por nós considerado. Assim, conforme a segunda abordagem, $(\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}))(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ é a fórmula $\exists \mathbf{z}\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{z})$. Isto conduz a um novo problema, pois a variável **z** pode ser escolhida de uma infinidade de maneiras, pois existe um número infinito de variáveis não ocorrendo em $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ nem em **y**, daí a nossa nova definição de $(\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}))(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ leva a uma infinidade de fórmulas, o que é uma ambigüidade. Para evitar isto, iremos considerar uma ordenação fixa na coleção das variáveis, e iremos sempre escolher, para fins

---

[39] Por exemplo, a fórmula $\mathbf{p}(\boldsymbol{x}, \mathbf{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ possui duas ocorrências de $\boldsymbol{x}$ e somente uma ocorrência de $\boldsymbol{y}$.

[40] Isto não acontece nas lógicas descritivas, onde ocorrências de variáveis sucedendo qualificadores ou certas variáveis no corpo de descrições não são livres nos termos que os contém.

[41] Em linguagens nas quais termos podem possuir variáveis ligadas, como por exemplo nas linguagens para a Lógica Descritiva Clássica ou para a Lógica das Descrições Indefinidas, dadas adiante, uma variável pode ocorrer em um termo e ainda assim não ser livre neste termo.

[42] O *universo de discurso* é a coleção subentendida de valores que as variáveis podem assumir em um dado contexto.

de instanciação, a primeira variável preenchendo as condições requeridas. Veremos posteriormente que a escolha da variável não altera o significado original da fórmula instanciada.

1.15 Convenção: A lista infinita "$\mathbf{x,y,z,w,x_1,y_1,z_1,w_1,x_2,y_2,z_2,w_2,x_3,y_3,z_3,w_3,\ldots}$" dá a ordenação das variáveis que será considerada ao longo de todo este livro.

1.16 Exemplo: Conforme a ordenação fixa das variáveis considerada a partir de agora, temos que, como $\mathbf{z}$ é a primeira variável não ocorrendo em $\mathbf{x \neq y}$ nem em $\mathbf{y}$, $(\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x \neq y}))(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ é a fórmula $\exists \mathbf{z}\ (\mathbf{y \neq z})$.

1.17 Definição: Os enunciados abaixo especificam a *instanciação de variáveis por termos* em termos, em fórmulas e em coleções de fórmulas:

- *A instanciação de* $\boldsymbol{x}$ *por* $\mathbf{t}$ *em* $\mathbf{u}$, notada por $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, é o termo obtido de $\mathbf{u}$ substituindo todas as ocorrências de $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{t}$.
- *A instanciação de* $\boldsymbol{x}$ *por* $\mathbf{t}$ *em* $\mathbf{P}$, notada por $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, é a fórmula obtida de $\mathbf{P}$ substituindo todas as ocorrências livres de $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{t}$, se $\mathbf{P}$ não possuir quantificadores. Caso houverem quantificadores na fórmula envolvida, então tal instanciação é definida conforme as seguintes cláusulas, onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas:
  - $(\boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P}$;
  - $(\boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \begin{cases} * \quad \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}), \text{ se } \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{P} \text{ ou } \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{t}; \\ * \quad \boldsymbol{\Psi} z\ \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|z)(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}), \text{ se } \boldsymbol{x} \text{ é livre em } \mathbf{P} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ é livre em } \mathbf{t}, \text{ onde} \\ \quad\; z \text{ é a primeira variável não ocorrendo em } \{\boldsymbol{x},\mathbf{t},\mathbf{P}\}. \end{cases}$ [43]
- *A instanciação de* $\boldsymbol{x}$ *por* $\mathbf{t}$ *em* $\boldsymbol{\Gamma}$, notada por $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, é a coleção $\{\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \mid \mathbf{P} \in \boldsymbol{\Gamma}\}$.

Há uma relação entre fórmulas que é fundamental para a formulação de vários resultados sintáticos concernentes à instanciação de variáveis, dados na lista de exercícios seguindo esta seção, que é a relação de *congruência entre fórmulas*.

1.18 Definição: As condições abaixo definem a *relação de congruência entre duas fórmulas*, notada por "$\approx_c$":

- $\mathbf{p}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}) \approx_c \mathbf{q}(\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_p})$ se, e somente se, $\mathbf{p = q}$, $\mathbf{n = p}$ e $\mathbf{t_i = u_i}$, para qualquer $\mathbf{i} = 1,\ldots,\mathbf{n}$.[44]
- $\neg\mathbf{P_1} \approx_c \neg\mathbf{P_2}$ se, e somente se, $\mathbf{P_1} \approx_c \mathbf{P_2}$.
- $\mathbf{P_1}\ \#\ \mathbf{Q_1} \approx_c \mathbf{P_2}\ \#\ \mathbf{Q_2}$ se, e somente se, $\mathbf{P_1} \approx_c \mathbf{P_2}$ e $\mathbf{Q_1} \approx_c \mathbf{Q_2}$.
- $\boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P_1} \approx_c \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P_2}$ se, e somente se $\begin{cases} \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1}, \\ \mathbf{P_1}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \approx_c \mathbf{P_2}. \end{cases}$
- Se $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ forem fórmulas de tipos diferentes, então $\mathbf{P_1} \not\approx_c \mathbf{P_2}$.[45]

Além da *instanciação de variáveis por termos em fórmulas*, existe uma outra operação importante de manipulação de fórmulas, que é a *substituição de fórmulas por fórmulas em fórmulas*. Enquanto que a primeira operação sintática é fundamental para a formulação de três das quatro leis de introdução e eliminação de quantificadores e suas conseqüências, a segunda operação é essencial para a enunciação das leis de substituição da equivalência para fórmulas.

Definiremos também duas outras operações sintáticas, a *substituição de termos por termos em termos*, e a *substituição de termos por termos em fórmulas*, que serão necessárias para a exposição das leis da substituição da igualdade, concernentes à Lógica Equacional.

Para especificar *substituição de termos por termos em fórmulas*, precisamos antes saber o que vem a ser *ocorrência real de um termo em uma fórmula*.

---

[43] A primeira condição desta cláusula pode ser desdobrada em duas condições, e daí a formulação seria desta forma: $(\boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P}$, se $\boldsymbol{x}$ não é livre em $\mathbf{P}$, e $(\boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\mathbf{t}$.

[44] Ou seja, duas fórmulas atômicas são congruentes se, e somente se, elas forem iguais.

[45] Isto é, não é verdade que $\mathbf{P_1} \approx_c \mathbf{P_2}$.

1.19 Definição: Todas as ocorrências de um termo em um termo são ditas serem *reais neste termo*.[46] Uma *ocorrência* de um termo **v** em uma fórmula **Q** é dita *real em* **Q** se a mesma não suceder em **Q** um dos quantificadores "∀" ou "∃".[47] Um *termo* **v** é dito ser *real em* **Q** se **v** possuir pelo menos uma ocorrência real em **Q**.

1.20 Definição: As cláusulas abaixo especificam *substituição de termos por termos*, e *substituição de fórmulas por fórmulas*:

- A *substituição de* **v** *por* **t** *em* **u**, notada por **u**(**v**‖**t**), é o termo obtido de **u** substituindo todas as ocorrências de **v** por **t**.
- A *substituição de* **v** *por* **t** *em* **P**, notada por **P**(**v**‖**t**), é a fórmula obtida de **P** substituindo todas as ocorrências reais de **v** por **t**.
- A *substituição de* **v** *por* **t** *em* **Γ**, notada por **Γ**(**v**‖**t**), é a coleção {**P**(**v**‖**t**) | **P** ∈ **Γ**}.
- A *substituição de* **S** *por* **P** *em* **Q**, notada por **Q**(**S**‖**P**), é a fórmula obtida de **Q** substituindo todas as ocorrências de **S** por **P**.
- A *substituição de* **S** *por* **P** *em* **Γ**, notada por **Γ**(**S**‖**P**), é a coleção {**Q**(**S**‖**P**) | **Q** ∈ **Γ**}.

Uma outra idéia imprescindível para a formulação das leis da substituição, dadas na página 37, é *escopo de uma variável*.

1.21 Definição: Um termo **v** é dito *estar no escopo de uma variável* ***x*** *em uma fórmula* **Q** se **Q** possuir uma subfórmula de uma das formas ∀***x*** **R** ou ∃***x*** **R**, tal que **v** é real em **R**. Uma fórmula **S** é dita *estar no escopo de uma variável* ***x*** *em uma fórmula* **Q** se **Q** possuir uma subfórmula de uma das formas ∀***x*** **R** ou ∃***x*** **R** tal que **S** ocorre em **R**.[48,49]

Exercícios

1) Defina recursivamente as seguintes funções booleanas:

(i) **oc** é uma função cujo domínio é a coleção dos pares da forma ⟨**D**,**E**⟩, tal que **oc**(**D**,**E**) = **v** se, e somente se, **D** ocorre em **E**.

(ii) **lig** é uma função cujo domínio é a coleção dos pares da forma ⟨***x***,**P**⟩, tal que **lig**(***x***,**P**) = **v** se, e somente se, ***x*** é ligado em **P**.

(iii) **liv** é uma função cujo domínio é a coleção dos pares da forma ⟨***x***,**P**⟩, tal que **liv**(***x***,**P**) = **v** se, e somente se, ***x*** é livre em **P**.

(iv) **real** é uma função cujo domínio é a coleção dos pares da forma ⟨**D**,**E**⟩, tal que **real**(**D**,**E**) = **v** se, e somente se, **D** é real em **E**.

2) Defina recursivamente as seguintes funções:

(i) **voc** é uma função cujo domínio é a coleção dos designadores em **LQC**, tal que **voc**(**D**) é a coleção das variáveis que ocorrem em **D**;

(ii) **vlig** é uma função cujo domínio é a coleção das fórmulas em **LQC**, tal que **vlig**(**P**) é a coleção das variáveis ligadas em **P**;

(iii) **vliv** é uma função cujo domínio é a coleção das fórmulas em **LQC**, tal que **vliv**(**P**) é a coleção das variáveis livres em **P**;

(iv) **gr** é uma função cujo domínio é a coleção das fórmulas em **LQC**, tal que **gr**(**P**), é o número de ocorrências de conectivos e de quantificadores em **P**[50].

---

[46] Isto não acontece nas lógicas descritivas, onde ocorrências de variáveis sucedendo qualificadores não são reais nos termos que os contém.

[47] Tal ocorrência não é real se **v** for uma variável que sucede "∀" ou "∃" em **Q**.

[48] Se ***x*** está no escopo forte de ***y*** em **P**, então ***x*** está no escopo de ***y*** em **P**, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Considere que a única subfórmula cuja variável quantificada é distinta de ***x*** que **P** possui é da forma ∀***y*** **Q**, tal que ***x*** é real em **Q**, mas ***x*** não é livre em **Q**. Temos então que ***x*** está no escopo de ***y*** em **P**, mas ***x*** não está no escopo forte de ***y*** em **P**, pelo fato de ***x*** não possuir em **P** nenhuma ocorrência livre figurando em ∀***y*** **Q**.

[49] Note que "estar no escopo forte de" é uma relação entre variáveis em uma fórmula, enquanto que "estar no escopo de" é uma relação entre um designador e uma variável em uma fórmula.

[50] Dada uma fórmula **P**, o número de suas ocorrências de conectivos e de quantificadores é dito *o grau de* **P**.

3) Dizemos que $\boldsymbol{x}$ *está no escopo forte de* $\boldsymbol{y}$ *em* **P** se $\boldsymbol{x}$ possuir uma ocorrência livre em **P** figurando em alguma subfórmula de **P** de uma das formas $\forall \boldsymbol{y}$ **Q** ou $\exists \boldsymbol{y}$ **Q**. Mostre que as seguintes proposições são válidas:

(i) Se $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P**, então $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas.
(ii) $\boldsymbol{x}$ não está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em $\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.[51]
(iii) $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P** se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em ¬**P**.
(iv) As seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P # Q**.
- $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P** ou $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **Q**.

(v) $\boldsymbol{x}$ não está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{\Psi x}$ **P**.
(vi) Se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{\Psi y}$ **P**.
- $\boldsymbol{x}$ é livre em **P**.

(vii) Se $\boldsymbol{z}$ não ocorre em $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{\Psi z}$ **P**.
- $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P**.

4) Defina recursivamente a função booleana **escf**, cujo domínio é a coleção das triplas $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\mathbf{P}\rangle$, tal que $\mathbf{escf}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\mathbf{P}) = \mathbf{v}$ se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ está no escopo forte de $\boldsymbol{y}$ em **P**.

5) Dizemos que $\boldsymbol{x}$ *aceita* **t** *em* **P** se $\boldsymbol{x}$ não estiver em **P** no escopo forte de alguma variável livre em **t**. Mostre que as seguintes proposições são verdadeiras:

(i) $\boldsymbol{x}$ aceita $\boldsymbol{x}$ em **P**.
(ii) Se nenhuma variável é ligada em **P**, então $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P**.
(iii) Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em **P**, então $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P**.
(iv) Se $\boldsymbol{y}$ não ocorre em **P**, então $\boldsymbol{x}$ aceita $\boldsymbol{y}$ em **P**.
(v) Se $\boldsymbol{y}$ não é ligado em **P**, então $\boldsymbol{x}$ aceita $\boldsymbol{y}$ em **P**.
(vi) Se nenhuma variável livre em **t** é ligada em **P**, então $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P**.
(vii) $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em $\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.[52]
(viii) $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P** se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em ¬**P**.
(ix) $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P # Q** se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P** e $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **Q**.
(x) $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em $\boldsymbol{\Psi x}$ **P**.
(xi) Se $\begin{cases} \boldsymbol{y} \text{ é distinto de } \boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{y} \text{ é livre em } \mathbf{t}, \end{cases}$ então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em $\boldsymbol{\Psi y}$ **P**;
- $\boldsymbol{x}$ não é livre em **P**.

(xii) Se $\boldsymbol{y}$não é livre em $\{\boldsymbol{x},\mathbf{t}\}$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em $\boldsymbol{\Psi y}$ **P**.
- $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P**.

(xiii) Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em $\{\boldsymbol{y},\mathbf{u}\}$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em **P**.
- $\boldsymbol{x}$ aceita **t** em $\mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})$.

(xiv) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $\boldsymbol{x}$ aceita $\boldsymbol{y}$ em **P**.
- $\boldsymbol{y}$ aceita $\boldsymbol{x}$ em $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.

---

[51] Isto não é verdadeiro em linguagens nas quais termos possuem variáveis ligadas, como é o caso nas lógicas descritivas.
[52] Isto não é verdadeiro em linguagens nas quais termos possuem variáveis ligadas.

(xv) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ aceita } \boldsymbol{y} \text{ em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{y} \text{ aceita } \mathbf{t} \text{ em } \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}), \end{cases}$ então $\boldsymbol{x}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$.

(xvi) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ aceita } \boldsymbol{y} \text{ em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então as seguintes asserções são equivalentes:

- $\boldsymbol{x}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$.
- $\boldsymbol{y}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.

6) Defina recursivamente a função booleana **ac**, cujo domínio é a coleção das triplas $\langle \boldsymbol{x},\mathbf{t},\mathbf{P}\rangle$, tal que $\mathbf{ac}(\boldsymbol{x},\mathbf{t},\mathbf{P}) = \mathbf{v}$ se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$.

7) Defina recursivamente instanciação de variáveis por termos em termos e em fórmulas:
(i) a instanciação de $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{t}$ em $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$;
(ii) a instanciação de $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

8) Considere $\mathbf{u}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$ e $\mathbf{P}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$ as samblagens obtidas respectivamente de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{P}$ substituindo todas as ocorrências livres de $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{t}$.
(i) Defina recursivamente:
  (a) $\mathbf{u}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$;
  (b) $\mathbf{P}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$.
(ii) Prove as seguintes proposições:
  (a) $\mathbf{u}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$ é um termo.
  (b) $\mathbf{P}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$ é uma fórmula.
  (c) As seguintes asserções são equivalentes:
    - $\boldsymbol{x}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$.
    - $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \mathbf{P}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$.
    - $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{P}[\boldsymbol{x}|\mathbf{t}]$.

9) Mostre que as seguintes proposições concernentes à instanciação são verdadeiras:
(i) $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$ é um termo.
(ii) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$ é uma fórmula.
(iii) Se $\begin{cases} \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ aceita } \boldsymbol{y} \text{ em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ aceita } \mathbf{t} \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}|\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(iv) Se $\begin{cases} \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ aceita } \boldsymbol{y} \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}$.
(v) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ são variáveis distintas}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{t}, \\ \boldsymbol{x} \text{ aceita } \mathbf{t} \text{ em } \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{y} \text{ aceita } \mathbf{u} \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})(\boldsymbol{y}|\mathbf{u}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

10) Defina recursivamente a função booleana **cgr**, cujo domínio é a coleção dos pares da forma $\langle \mathbf{P},\mathbf{Q}\rangle$, tal que $\mathbf{cgr}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \mathbf{v}$ se, e somente se, $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{Q}$.

11) Prove a validade das seguintes proposições concernentes à relação de congruência entre fórmulas:
(i) $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{P}$.
(ii) Se $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{Q}$, então $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ possuem as mesmas variáveis livres.
(iii) Se $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{Q}$, então $\mathbf{gr}(\mathbf{P}) = \mathbf{gr}(\mathbf{Q})$.
(iv) Existe $\mathbf{P'}$ tal que $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{P'}$ e $\boldsymbol{x}$ aceita $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P'}$.
(v) Existe $\mathbf{P'}$ tal que $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{P'}$ e $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ aceitam respectivamente $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P'}$.
(vi) Se $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{Q}$, então $\mathbf{Q} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{P}$.
(vii) Se $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{R}$, então $\mathbf{P} \approx_{\mathbf{c}} \mathbf{R}$.

(viii) Se $\mathbf{P} \approx_c \mathbf{Q}$, então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \approx_c \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(ix) Se $\mathbf{P} \approx_c \mathbf{Q}$, então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1|\mathbf{t}_1)\ldots(\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_n) \approx_c \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}_1|\mathbf{t}_1)\ldots(\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_n)$.

12) Prove a validade das seguintes proposições suplementares concernentes à instanciação de fórmulas:

(i) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ são variáveis distintas,} \\ \boldsymbol{z} \text{ não é livre em } \{\boldsymbol{x},\mathbf{t},\mathbf{P}\} \end{cases}$ então $(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{y}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \approx_c \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{z}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z}|\mathbf{t})$.
(ii) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}|\mathbf{t}) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(iii) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \approx_c \mathbf{P}$.
(iv) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ são variáveis distintas,} \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{t}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})(\boldsymbol{y}|\mathbf{u}) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(v) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})(\boldsymbol{y}|\mathbf{u}) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t'})$, onde $\mathbf{t'} = \mathbf{t}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})$.
(vi) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ são variáveis distintas,} \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{u}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})(\boldsymbol{y}|\mathbf{u}) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t'})$, onde $\mathbf{t'} = \mathbf{t}(\boldsymbol{y}|\mathbf{u})$.

13) Defina recursivamente substituição de termos por termos, e de fórmulas por fórmulas:
(i) a substituição de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{t}$ em $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t})$;
(ii) a substituição de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{t}$ em $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\mathbf{v}\|\mathbf{t})$;
(iii) a substituição de $\mathbf{S}$ por $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$.

14) Com respeito à substituição de termos por termos, e de fórmulas por fórmulas, mostre que:
(i) $\mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t})$ é um termo.
(ii) $\mathbf{P}(\mathbf{v}\|\mathbf{t})$ é uma fórmula.
(iii) $\mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$ é uma fórmula.
(iv) Se $\mathbf{S}_2$ não ocorre em $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{S}_1\|\mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_2\|\mathbf{P}) = \mathbf{Q}(\mathbf{S}_1\|\mathbf{P})$.
(v) Se $\begin{cases} \mathbf{S}_1 \text{ não ocorre em } \mathbf{S}_2, \\ \mathbf{S}_2 \text{ não ocorre em } \mathbf{S}_1, \\ \mathbf{S}_1 \text{ não ocorre em } \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{S}_2 \text{ não ocorre em } \mathbf{P}_1, \end{cases}$ então $\mathbf{Q}(\mathbf{S}_1\|\mathbf{P}_1)(\mathbf{S}_2\|\mathbf{P}_2) = \mathbf{Q}(\mathbf{S}_2\|\mathbf{P}_2)(\mathbf{S}_1\|\mathbf{P}_1)$.

15) Mostre que as proposições abaixo, que relacionam instanciação com substituição, são válidas:
(i) $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{x}\|\mathbf{t})$[53].
(ii) Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em $\{\mathbf{S},\mathbf{P}\}$, então $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) = \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

16) Prove a validade das seguintes proposições concernentes ao escopo de uma variável:
(i) **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **P** se, e somente se, **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em $\neg\mathbf{P}$.
(ii) As seguintes proposições são equivalentes:
- **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **P # Q**.
- **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **P** ou **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **Q**.

(iii) **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ se, e somente se, **D** é real em **P**.
(iv) Se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas, então as seguintes proposições são equivalentes:
- **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{y}\ \mathbf{P}$.
- **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **P**.

17) Defina recursivamente a função booleana **esc**, cujo domínio é a coleção das triplas da forma $\langle \mathbf{D},\boldsymbol{x},\mathbf{P}\rangle$, tal que $\mathbf{esc}(\mathbf{D},\boldsymbol{x},\mathbf{P}) = \mathbf{v}$ se, e somente se, **D** está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em **P**.

---

[53] Isto não ocorre necessariamente em linguagens nas quais termos podem ter variáveis ligadas, como por exemplo nas linguagens para a *Lógica Descritiva Clássica*.

18) Dizemos que $x_1,\ldots,x_n$ *aceitam* $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ *em* $\mathbf{P}$ se, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, x_i aceita $\mathbf{t}_i$ em $\mathbf{P}$. Prove a validade das seguintes proposições:

(i) $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $x_1,\ldots,x_n$ em $\mathbf{P}$.

(ii) Se nenhuma variável é ligada em $\mathbf{P}$, então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.

(iii) Se $x_1,\ldots,x_n$ não são livres em $\mathbf{P}$, então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.

(iv) Se $y_1,\ldots,y_n$ não ocorrem em $\mathbf{P}$, então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $y_1,\ldots,y_n$ em $\mathbf{P}$.

(v) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são ligados em $\mathbf{P}$, então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $y_1,\ldots,y_n$ em $\mathbf{P}$.

(vi) Se nenhuma variável livre em $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ é ligada em $\mathbf{P}$, então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.

(vii) Existe $\mathbf{P'}$ tal que $\mathbf{P} \approx_c \mathbf{P'}$ e $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P'}$.

(viii) $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{p}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$.[54]

(ix) $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\neg\mathbf{P}$ se, e somente se, $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.

(x) As seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P} \# \mathbf{Q}$.
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$ e $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{Q}$.

(xi) Se $x = x_i$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\Psi x\ \mathbf{P}$.
- $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{i-1},\mathbf{t}_{i+1},\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\Psi x\ \mathbf{P}$.

(xii) Considere $\begin{cases} \mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_p \text{ os inteiros } \mathbf{i} \text{ tais que } 1 \le \mathbf{i} \le \mathbf{n} \text{ e } x \text{ é livre em } \mathbf{t}_i, \\ \mathbf{j}_1,\ldots,\mathbf{j}_r \text{ os inteiros } \mathbf{j} \text{ tais que } 1 \le \mathbf{j} \le \mathbf{n} \text{ e } x \text{ não é livre em } \mathbf{t}_j. \end{cases}$

Se, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $x \neq x_i$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\Psi x\ \mathbf{P}$.
- $x_{i_1},\ldots,x_{i_p}$ não são livres em $\mathbf{P}$ e $x_{j_1},\ldots,x_{j_r}$ aceitam $\mathbf{t}_{j_1},\ldots,\mathbf{t}_{j_r}$ em $\mathbf{P}$.

(xiii) Se $x_1,\ldots,x_n$ não são livres em $\{y_1,\ldots,y_r,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r\}$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}(y_1,\ldots,y_r|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r)$.

(xiv) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são livres em $\mathbf{P}$, então as seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $y_1,\ldots,y_n$ em $\mathbf{P}$.
- $y_1,\ldots,y_n$ aceitam $x_1,\ldots,x_n$ em $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)$.

(xv) Se $\begin{cases} x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } y_1,\ldots,y_n \text{ em } \mathbf{P}, \\ y_1,\ldots,y_n \text{ aceitam } x_1,\ldots,x_n \text{ em } \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n), \end{cases}$ então $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.

(xvi) Se $\begin{cases} x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } y_1,\ldots,y_n \text{ em } \mathbf{P}, \\ y_1,\ldots,y_n \text{ não são livres em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então as seguintes asserções são equivalentes:
- $x_1,\ldots,x_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}$.
- $y_1,\ldots,y_n$ aceitam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)$.

19) Sejam $x_1,\ldots,x_n$ variáveis distintas. Obtemos *a instanciação simultânea de* $x_1,\ldots,x_n$ *por* $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ *em um termo ou uma fórmula* sem quantificadores substituindo simultaneamente todas as ocorrências livres de $x_1,\ldots,x_n$ respectivamente por $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$. Se houverem quantificadores na fórmula envolvida, então tal instanciação é definida pelas seguintes cláusulas:

Se existe $\mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$ tal que x_i é x, então

$(\Psi x\ \mathbf{P})(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) = (\Psi x\ \mathbf{P})(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{i-1},\mathbf{t}_{i+1},\ldots,\mathbf{t}_n)$.

Se, para todo $\mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$, $x_i \neq x$, então

$$(\Psi x\ \mathbf{P})(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) = \begin{cases} * & \Psi x\ \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n), \text{ se, para cada } \mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}, \\ & x_i \text{ não é livre em } \mathbf{P} \text{ ou } x \text{ não é livre em } \mathbf{t}_i; \\ * & \Psi z\ \mathbf{P}(x|z)(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n), \text{ se existe } \mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\} \\ & \text{tal que } x_i \text{ é livre em } \mathbf{P} \text{ e } x \text{ é livre em } \mathbf{t}_i, \text{ onde } z \text{ é} \\ & \text{a primeira variável não ocorrendo em } \{x_1,\ldots,x_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n,\mathbf{P}\}. \end{cases}$$

[54] Isto não é válido em linguagens nas quais termos possuem variáveis ligadas, como ocorre nas lógicas descritivas.

(i) Defina recursivamente:

(a) a instanciação simultânea de $x_1,\ldots,x_n$ por $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em um termo $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$;

(b) a instanciação simultânea de $x_1,\ldots,x_n$ por $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em uma fórmula $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(ii) Mostre que:

(a) $\mathbf{u}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ é um termo.

(b) $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ é uma fórmula.

(c) Considerando que $\mathbf{u}\{x_1|\mathbf{t}_1\}$ e $\mathbf{P}\{x_1|\mathbf{t}_1\}$ são respectivamente a instanciação simultânea de $x_1,\ldots,x_n$ por $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ em $\mathbf{u}$ e $\mathbf{P}$ para o caso em que $\mathbf{n} = 1$, mostre que:

(1) $\mathbf{u}\{x_1|\mathbf{t}_1\} = \mathbf{u}(x_1|\mathbf{t}_1)$.

(2) $\mathbf{P}\{x_1|\mathbf{t}_1\} = \mathbf{P}(x_1|\mathbf{t}_1)$.

(d) $\mathbf{u}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) = \mathbf{u}(x_{\mathbf{i}_1},\ldots,x_{\mathbf{i}_\mathbf{p}}|\mathbf{t}_{\mathbf{i}_1},\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{i}_\mathbf{p}})$, onde $\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_\mathbf{p}$ são os inteiros $\mathbf{i}$ tais que $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$ e $x_\mathbf{i}$ é livre em $\mathbf{u}$.

(e) $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) = \mathbf{P}(x_{\mathbf{i}_1},\ldots,x_{\mathbf{i}_\mathbf{p}}|\mathbf{t}_{\mathbf{i}_1},\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{i}_\mathbf{p}})$, onde $\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_\mathbf{p}$ são os inteiros $\mathbf{i}$ tais que $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$ e $x_\mathbf{i}$ é livre em $\mathbf{P}$.

(f) Se $\begin{cases} y_1,\ldots,y_n \text{ não são livres em } \mathbf{P}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } y_1,\ldots,y_n \text{ em } \mathbf{P}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } \mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$

então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)(y_1,\ldots,y_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) = \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(g) Se $\begin{cases} y_1,\ldots,y_n \text{ não são livres em } \mathbf{P}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } y_1,\ldots,y_n \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)(y_1,\ldots,y_n|x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{P}$.

(h) Se $\begin{cases} x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p \text{ são variáveis distintas}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ não são livres em } \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p}, \\ y_1,\ldots,y_p \text{ não são livres em } \mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ aceitam } \mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n \text{ em } \mathbf{P}, \\ y_1,\ldots,y_p \text{ aceitam } \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p} \text{ em } \mathbf{P}, \end{cases}$

então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(y_1,\ldots,y_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p}) = \mathbf{P}(y_1,\ldots,y_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p})(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(i) Se $\mathbf{P} \approx_c \mathbf{Q}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \approx_c \mathbf{Q}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(j) Se $\begin{cases} \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\},\ x_\mathbf{i} \neq x, \\ z \text{ não é livre em } \{x,x_1,\ldots,x_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n,\mathbf{P}\}, \end{cases}$

então $(\Psi x\ \mathbf{P})(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \approx_c \Psi z\ \mathbf{P}(x|z)(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(k) Se, para quaisquer $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$ tal que $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, $x_\mathbf{i}$ não é livre em $\mathbf{t}_\mathbf{j}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \approx_c \mathbf{P}(x_1|\mathbf{t}_1)\ldots(x_n|\mathbf{t}_n)$.

(l) Se $y_1,\ldots,y_n$ são variáveis distintas não livres em $x_1,\ldots,x_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n,\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \approx_c \mathbf{P}(x_1|y_1)\ldots(x_n|y_n)(y_1|\mathbf{t}_1)\ldots(y_n|\mathbf{t}_n)$.

(m) Se $y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}$ são variáveis distintas não livres em $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n,\mathbf{t}_{n+1},\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_{n+1}|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{n+1}) \approx_c \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)(x_{n+1}|y_{n+1})(y_1,\ldots,y_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(y_{n+1}|\mathbf{t}_{n+1})$.

(n) Se $\begin{cases} x_1,\ldots,x_n \text{ são variáveis distintas}, \\ y_1,\ldots,y_n \text{ são variáveis distintas}, \\ y_1,\ldots,y_n \text{ não são livres em } \mathbf{P}, \end{cases}$ então $\Psi x_1,\ldots,x_n\ \mathbf{P} \approx_c \Psi y_1,\ldots,y_n\ \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)$.

(o) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são livres em $\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)(y_1,\ldots,y_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \approx_c \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(p) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são livres em $\mathbf{P}$, então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)(y_1,\ldots,y_n|x_1,\ldots,x_n) \approx_c \mathbf{P}$.

(q) Se $\begin{cases} x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p \text{ são variáveis distintas}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ não são livres em } \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p}, \\ y_1,\ldots,y_p \text{ não são livres em } \mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n, \end{cases}$

então $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(y_1,\ldots,y_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p}) \approx_c \mathbf{P}(y_1,\ldots,y_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_\mathbf{p})(x_1,\ldots,x_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(r) Se $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n$ não são livres em **P**,
então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}'_1,\ldots,\mathbf{t}'_n)$, onde,
para cada $\mathbf{i} = 1,\ldots,\mathbf{n}$, $\mathbf{t}'_i = \mathbf{t}_i(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$.

(s) Se $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p \text{ são variáveis distintas,} \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p, \end{cases}$
então $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}'_1,\ldots,\mathbf{t}'_n)$,
onde, para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $\mathbf{t}'_i = \mathbf{t}_i(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_p|\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$.

20) Sejam **f** e **p** respectivamente um sinal funcional e um sinal predicativo, ambos de aridade **n**. Especificamos a seguir o que entendemos por *substituição uniforme em um dado termo* **u**, *em uma dada fórmula* **Q** e em uma dada coleção de fórmulas **Γ**:

- A substituição uniforme de $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ por **t** em **u**, notada por $\mathbf{u}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$, é a samblagem obtida de **u** substituindo todos os termos da forma $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ por $\mathbf{t}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.
- A substituição uniforme de $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ por **t** em **Q**, notada por $\mathbf{Q}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$, é a samblagem obtida de **Q** substituindo todos os termos da forma $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ por $\mathbf{t}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.
- A substituição uniforme de $\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ por **P** em **Q**, notada por $\mathbf{Q}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$, é a samblagem obtida de **Q** substituindo todas as fórmulas da forma $\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ por $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.
- A substituição uniforme de $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ por **t** em **Γ**, notada por $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$, é a coleção de samblagens da forma $\mathbf{Q}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$, tal que $\mathbf{Q} \in \mathbf{\Gamma}$.
- A substituição uniforme de $\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ por **P** em **Γ**, notada por $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$, é a coleção de samblagens da forma $\mathbf{Q}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$, tal que $\mathbf{Q} \in \mathbf{\Gamma}$.

(i) Defina recursivamente:
  (a) $\mathbf{u}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$.
  (b) $\mathbf{Q}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$.
  (c) $\mathbf{Q}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$.

(ii) Mostre que:
  (a) $\mathbf{u}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$ é um termo.
  (b) $\mathbf{Q}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$ é uma fórmula.
  (c) $\mathbf{Q}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$ é uma fórmula.
  (d) $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$ é uma coleção de fórmulas.
  (e) $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$ é uma coleção de fórmulas.

(iii) Considerando que **t** e **P** possuem no máximo $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ como variáveis livres, mostre que:
  (a) $\mathbf{t}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}) = \mathbf{t}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}),\ldots,\mathbf{t}_n(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}))$.
  (b) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}) \approx_c \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}),\ldots,\mathbf{t}_n(\boldsymbol{x}|\mathbf{v}))$.
  (c) $\mathbf{u}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}](\boldsymbol{x}|\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{v})[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$.
  (d) $\mathbf{Q}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}](\boldsymbol{x}|\mathbf{v}) \approx_c \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{v})[\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{t}]$.
  (e) $\mathbf{Q}[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}](\boldsymbol{x}|\mathbf{v}) \approx_c \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{v})[\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|\mathbf{P}]$.

§2. Um Cálculo de Seqüentes para a Lógica Quantificacional Clássica

Nesta seção nós falaremos somente da lógica quantificacional clássica; assim, para dizer que **P** é conseqüência de **Γ** em **LQC**, notaremos isto por $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

Damos abaixo um cálculo de seqüentes para **LQC**. Este se constitui de todas as leis primitivas de **LPC**, traduzidas para a linguagem de **LQC**, mais as *Leis de Introdução e Eliminação de Quantificadores.*

Todas as *leis derivadas de* **LPC** citadas na parte expositiva da seção anterior, devidamente traduzidas para a linguagem de **LQC**, também são válidas em **LQC**, com exceção do *Esquema da Substituição da Equivalência*, dado na página 37, o qual não é válido nesta forma em **LQC**, por supor implicitamente um fato não necessariamente presente em **LQC**, devido à sua distinta estrutura sintática.

Leis de Introdução e Eliminação de Quantificadores

2.1 Generalização: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{\Gamma}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma} \vdash \forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.

2.2 ∀-Eliminação: $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

2.3 ∃-Introdução: $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.

2.4 ∃-Eliminação: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}, \\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \vdash \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{\Gamma} \cup \{\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}, \mathbf{Q}\}, \end{cases}$ [55]então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}$.[56]

2.5 Notação: Considere, no resto deste trabalho, **TNI**[57] uma *axiomática*[58] para os números inteiros.

A seguir damos um exemplo mostrando por que a restrição de $\boldsymbol{x}$ não ser livre em $\mathbf{\Gamma}$ na Regra da Generalização é importante.

2.6 Exemplo: Temos que **TNI**, $\boldsymbol{x} = 5 \vdash$ primo($\boldsymbol{x}$), e daí, aplicando a Regra da Generalização sem atender à restrição de que $\boldsymbol{x}$ não deve ser livre em $\mathbf{\Gamma}$, temos que **TNI**, $\boldsymbol{x} = 5 \vdash \forall \boldsymbol{x}$ primo($\boldsymbol{x}$), e daí **TNI** $\vdash \boldsymbol{x} = 5 \rightarrow \forall \boldsymbol{x}$ primo($\boldsymbol{x}$). Aplicando a este último seqüente sucessivamente a Regra da Generalização e o Esquema do ∀-Eliminação, temos que **TNI** $\vdash 5 = 5 \rightarrow \forall \boldsymbol{x}$ primo($\boldsymbol{x}$), e daí **TNI** $\vdash \forall \boldsymbol{x}$ primo($\boldsymbol{x}$), o que evidentemente não é verdadeiro.

O exemplo seguinte mostra a importância da restrição de que $\boldsymbol{y}$ não deve ser livre em $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$ na Regra do ∃-Eliminação. No mesmo esta restrição é violada e as demais são respeitadas.

2.7 Exemplo: Considere que o universo de discurso implícito é a coleção dos números inteiros. Temos que **TNI** $\vdash \exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y})$. Se aplicarmos a Regra do ∃-Eliminação sem atender à restrição de que $\boldsymbol{y}$ não deve ser livre em $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$, temos que $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}) \vdash \boldsymbol{y} > \boldsymbol{y}$, o que acarreta, pela Regra do ∃-Introdução, em $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}) \vdash \exists \boldsymbol{y} (\boldsymbol{y} > \boldsymbol{y})$, e daí **TNI** $\vdash \exists \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{y} > \boldsymbol{y})$, o que não é verdadeiro.

Existe uma forma de ∃-Eliminação que é na prática bem mais utilizada, a qual é dada a seguir.

2.8 Corolário: Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}, \\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{\Gamma} \cup \{\mathbf{Q}\}, \end{cases}$ [59]então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}$.

No exemplo abaixo mostramos a importância da restrição de $\boldsymbol{x}$ não ser livre em $\mathbf{\Gamma}$, nesta segunda versão da Regra do ∃-Eliminação. Esta é violada, mas a outra restrição é respeitada.

2.9 Exemplo: Temos que **TNI** $\vdash \exists \boldsymbol{x}$ ímpar($\boldsymbol{x}$), e daí **TNI**, par($\boldsymbol{x}$) $\vdash \exists \boldsymbol{x}$ ímpar($\boldsymbol{x}$). Aplicando a versão simplificada da Regra do ∃-Eliminação sem atender à restrição de que $\boldsymbol{x}$ não deve ser livre em $\mathbf{\Gamma}$, acabamos concluindo que **TNI** $\vdash \exists \boldsymbol{x}$ (par($\boldsymbol{x}$) ∧ ímpar($\boldsymbol{x}$)), o que não é válido.

---

[55] Em uma das hipóteses desta regra, a fórmula $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$ é redundante como premissa, mas foi aqui colocada com objetivos didáticos, pois, nas aplicações relevantes, esta fórmula aparece em primeiro lugar, antes da suposição da fórmula $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.

[56] Se $\boldsymbol{x}$ não for livre em $\mathbf{\Gamma} \cup \{\mathbf{Q}\}$ (obviamente, $\boldsymbol{x}$ já não é livre em $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$), então a variável $\boldsymbol{y}$ a ser utilizada pode ser a própria variável $\boldsymbol{x}$. Adiante é dada uma versão simplificada desta regra levando isto em conta.

[57] "**TNI**" é uma sigla para "teoria dos números inteiros".

[58] Isto é, uma coleção de fórmulas descrevendo as propriedades básicas dos números inteiros.

[59] Na hipótese desta regra, a fórmula $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$ é redundante como premissa, mas foi aqui colocada com objetivos didáticos, pois, nas aplicações relevantes, esta fórmula aparece em primeiro lugar, antes da suposição da fórmula **P**.

No exemplo seguinte mostramos a importância específica da restrição de $\boldsymbol{x}$ ser livre em **Q**, na formulação desta segunda versão da Regra do ∃-Eliminação.

2.10 Exemplo: Temos que $\mathbf{TNI} \vdash \exists \boldsymbol{x}\ \text{perfeito}(\boldsymbol{x})$.[60] Aplicando esta segunda versão da Regra do ∃-Eliminação sem atender à restrição de que $\boldsymbol{x}$ não deve ser livre em **Q**, temos que $\exists \boldsymbol{x}\ \text{perfeito}(\boldsymbol{x}) \vdash \text{perfeito}(\boldsymbol{x})$, e daí, aplicando a Regra da Generalização, temos que $\exists \boldsymbol{x}\ \text{perfeito}(\boldsymbol{x}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\ \text{perfeito}(\boldsymbol{x})$, o que nos leva a concluir que $\mathbf{TNI} \vdash \forall \boldsymbol{x}\ \text{perfeito}(\boldsymbol{x})$, o que obviamente é falso.

Leis Básicas dos Quantificadores

2.11 Negação de Fórmula Existencial: $\vdash \neg\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\ \neg\mathbf{P}$.

2.12 Negação de Fórmula Universal: $\vdash \neg\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\ \neg\mathbf{P}$.

2.13 Instanciação: Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \Gamma, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

2.14 Vacuidade[61]: Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em **P**, então $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} & \vdash \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}. \end{cases}$

2.15 Congruência: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}); \\ \text{(ii)} & \vdash \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}). \end{cases}$

2.16 Lema da Substituição para Quantificadores: $\begin{cases} \text{(i)} & \forall \boldsymbol{x}\ (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_2}; \\ \text{(ii)} & \forall \boldsymbol{x}\ (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_1} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P_2}. \end{cases}$

2.17 Esquema da Substituição da Equivalência:

- Se $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que **S** está no seu escopo em **Q**, então $\forall \boldsymbol{x_1}\ldots\forall \boldsymbol{x_n}(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

2.18 Regra da Substituição da Equivalência:

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$ então

  $\Gamma \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

O exemplo abaixo mostra a importância da restrição na formulação da Regra da Substituição da Equivalência.

2.19 Exemplo:
Temos que $\mathbf{TNI} \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = 2 \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$, e daí $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 2 \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = 2 \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$. Temos também que $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 2 \vdash \boldsymbol{x} = 2 \leftrightarrow \text{par}(\boldsymbol{x})$. Aplicando a Regra da Substituição da Equivalência sem levar em conta a sua restrição, segue-se que $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 2 \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\text{par}(\boldsymbol{x}) \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$, e daí $\mathbf{TNI} \vdash \boldsymbol{x} = 2 \to \forall \boldsymbol{x}\ (\text{par}(\boldsymbol{x}) \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$, donde, aplicando-se sucessivamente a Regra da Instanciação e Modus Ponens, $\mathbf{TNI} \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\text{par}(\boldsymbol{x}) \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$, o que é um absurdo. Observe que a fórmula $\boldsymbol{x} = 2$ está no escopo de $\boldsymbol{x}$ e, ao mesmo tempo, $\boldsymbol{x}$ é livre em $(\mathbf{TNI} \cup \{\boldsymbol{x} = 2\}) \cap \{\boldsymbol{x} = 2, \text{par}(\boldsymbol{x})\}$, ou seja, $\boldsymbol{x} = 2$ não pode ser substituído por $\text{par}(\boldsymbol{x})$ em $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 2 \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = 2 \to \text{primo}(\boldsymbol{x}))$ sem gerar algo falso.

---

[60] Um número inteiro positivo é dito *perfeito* se a soma dos seus divisores positivos distintos dele próprio for igual a este número. Por exemplo, 6 e 28 são ambos números perfeitos.

[61] As ocorrências das samblagens "$\forall \boldsymbol{x}$" e "$\exists \boldsymbol{x}$" seguidas por uma fórmula em que $\boldsymbol{x}$ não é livre são ditas *quantificadores vácuos*.

Leis Complementares dos Quantificadores

2.20 Comutatividade: (i) $\vdash \forall x \forall y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall y \forall x\ \mathbf{P}$; (ii) $\vdash \exists x \exists y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists y \exists x\ \mathbf{P}$.

2.21 ∃-Importação: $\vdash \exists x \forall y\ \mathbf{P} \rightarrow \forall y \exists x\ \mathbf{P}$.

2.22 Distributividade e Fatorabilidade de Quantificadores:

(i) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \wedge \forall x\ \mathbf{Q}$;
(iii) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \vee \forall x\ \mathbf{Q} \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$;
(iv) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(v) $\vdash (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(vi) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q}$;
(vii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \vee \exists x\ \mathbf{Q}$.

2.23 Distributividade e Fatorabilidade Degeneradas de Quantificadores:

(i) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\vdash (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(iii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ \mathbf{P} \vee \exists x\ \mathbf{Q}$;
(iv) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ \mathbf{P} \vee \forall x\ \mathbf{Q}$;
(v) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(vi) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q}$;
(vii) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(viii) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \wedge \forall x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(ix) $\vdash (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(x) $\vdash (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

2.24 Transporte de Quantificadores:

- Se x não é livre em **P**, então
  (i) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
  (ii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
  (iii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \forall x\ \mathbf{Q}$;
  (iv) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q}$;
  (v) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \forall x\ \mathbf{Q}$;
  (vi) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \exists x\ \mathbf{Q}$.

- Se x não é livre em **Q**, então
  (vii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
  (viii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
  (ix) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$;
  (x) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$;
  (xi) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$;
  (xii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$.

2.25 ∃-Exportação: Se { x não é livre em **Q**; y não é livre em **P** } ou { x não é livre em **P**; y não é livre em **Q** }, então:

(i) $\vdash \forall x \exists y\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists y \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(ii) $\vdash \forall x \exists y\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists y \forall x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(iii) $\vdash \forall x \exists y\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists y \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.

Quantificadores Típicos

Embora definimos fórmulas universais e existenciais em **LQC** para quaisquer corpos, o seu maior uso prático dá-se com implicações e conjunções respectivamente como corpos de fórmulas universais e de fórmulas existenciais.

Uma fórmula universal com um corpo qualquer pode significar algo bem improvável de ser verdadeiro. Por exemplo, considere a fórmula $\forall \boldsymbol{x}$ efêmero($\boldsymbol{x}$). Pelo significado que normalmente atribuímos a ser efêmero, temos que esta fórmula é falsa, mas existem várias restrições possíveis para o intervalo de valores da variável $\boldsymbol{x}$ que poderiam torná-la verdadeira. Poderíamos, por exemplo, restringir os valores de $\boldsymbol{x}$ para a classe das borboletas, e expressar facilmente esta restrição escrevendo $\forall \boldsymbol{x}$ (borboleta($\boldsymbol{x}$) $\rightarrow$ efêmero($\boldsymbol{x}$)).

De uma forma análoga, uma fórmula existencial com um corpo qualquer pode significar algo tão genérico que é muito improvável de ser falso, assim a informação contida em tal fórmula é em geral desprovida de utilidade. Por exemplo, considere a fórmula $\exists \boldsymbol{x}$ homem($\boldsymbol{x}$). Tal informação é tão genérica e óbvia que normalmente não possui utilidade prática. Restringindo o domínio de valores possíveis da variável $\boldsymbol{x}$, poderíamos expressar algo bem mais interessante. Poderíamos por exemplo limitar os valores de $\boldsymbol{x}$ para a classe dos centenários, e expressar com facilidade tal restrição escrevendo $\exists \boldsymbol{x}$ (centenário($\boldsymbol{x}$) $\wedge$ homem($\boldsymbol{x}$)).

Para um estudo sistemático de tais fórmulas quantificadas, utilizamos as abreviaturas dadas a seguir.

2.26 Definição: Adotamos as seguintes abreviaturas para fórmulas universais e existenciais cujos corpos são respectivamente implicações e conjunções:

- $\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \forall \boldsymbol{x}(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P})$;
- $\exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \exists \boldsymbol{x}(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P})$.

As expressões "$\forall \mathbf{R}$" e "$\exists \mathbf{R}$" são chamadas de *quantificadores típicos*, respectivamente *quantificadores universais típicos* e *quantificadores existenciais típicos*. As fórmulas $\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ e $\exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ são também chamadas de *universais típicas* e *existenciais típicas*, onde **R** é sua *extensão* e **P** é seu *corpo*.

Dizer $\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ significa afirmar que cada objeto $\boldsymbol{x}$ que satisfaz **R** satisfaz **P**, isto é, a propriedade universal $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ torna-se restrita aos objetos $\boldsymbol{x}$ do *tipo* ou do *gênero* que satisfazem **R**. Da mesma forma, dizer $\exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ significa afirmar que existe um objeto que satisfaz **R** e **P**, isto é, a propriedade existencial $\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ torna-se restrita aos objetos $\boldsymbol{x}$ do *tipo* ou do *gênero* que satisfazem **R**.

Empreendemos a seguir um estudo mais detalhado destes quantificadores. Conforme veremos, muitas das propriedades dos quantificadores típicos assemelham-se bastante às dos quantificadores comuns, sendo que a única diferença está em eventuais restrições adicionais.

2.27 Bifurcação: $\begin{cases} \text{(i)} & \vdash \forall(\mathbf{R} \vee \mathbf{S})\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \wedge \forall \mathbf{S}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}; \\ \text{(ii)} & \vdash \exists(\mathbf{R} \vee \mathbf{S})\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \vee \exists \mathbf{S}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}. \end{cases}$

Um outro resultado específico de quantificadores típicos está na sua capacidade de retração ou desdobramento. Antes de enunciá-lo, precisamos de uma definição correspondente.

2.28 Definição: Adotamos as seguintes abreviaturas concernentes à quantificação típica envolvendo duas variáveis simultaneamente:

- $\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\ (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P})$;
- $\exists \mathbf{R}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\ (\mathbf{R} \wedge \mathbf{P})$.

2.29 Aninhamento: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **R**, então $\begin{cases} \text{(ii)} & \vdash \forall(\mathbf{R} \wedge \mathbf{S})\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\forall \mathbf{S}\boldsymbol{y}\ \mathbf{P}; \\ \text{(iii)} & \vdash \exists(\mathbf{R} \wedge \mathbf{S})\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\exists \mathbf{S}\boldsymbol{y}\ \mathbf{P}. \end{cases}$

2.30 Negação de Fórmula Existencial Típica: $\vdash \neg\exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \neg\mathbf{P}$.

2.31 Negação de Fórmula Universal Típica: $\vdash \neg\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\ \neg\mathbf{P}$.

2.32 Congruência:

- Se y não é livre em $\{\mathbf{R},\mathbf{P}\}$, então $\begin{cases}\text{(ii)} \vdash \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R}(x|y)y\ \mathbf{P}(x|y); \\ \text{(iii)} \vdash \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}(x|y)y\ \mathbf{P}(x|y).\end{cases}$

2.33 Comutatividade:

- Se $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \mathbf{S}, \\ y \text{ não é livre em } \mathbf{R}, \end{cases}$ então $\begin{cases}\text{(ii)} \vdash \forall\mathbf{R}x\forall\mathbf{S}y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{S}y\forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P}; \\ \text{(iii)} \vdash \exists\mathbf{R}x\exists\mathbf{S}y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{S}y\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P}.\end{cases}$

2.34 ∃-Importação: Se $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \mathbf{S}, \\ y \text{ não é livre em } \mathbf{R}, \end{cases}$ então $\vdash \exists\mathbf{R}x\forall\mathbf{S}y\ \mathbf{P} \rightarrow \forall\mathbf{S}y\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P}$.

2.35 Distributividade e Fatorabilidade de Quantificadores Típicos:

(i) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$;
(iii) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q} \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$;
(iv) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q})$;
(v) $\exists x\ \mathbf{R} \vdash (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(vi) $\vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$;
(vii) $\vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$.

2.36 Distributividade e Fatorabilidade Degeneradas de Quantificadores Típicos:

(i) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\vdash (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(iii) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$;
(iv) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$;
(v) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q})$;
(vi) $\vdash \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(vii) $\vdash \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(viii) $\vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$;
(ix) $\vdash (\forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(x) $\vdash (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

2.37 Transporte de Quantificadores Típicos:

- Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\begin{cases}\text{(ii)} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}); \\ \text{(iii)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}); \\ \text{(iv)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}; \\ \text{(v)} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}; \\ \text{(vi)} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}; \\ \text{(vii)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{Q}.\end{cases}$

- Se x não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\begin{cases}\text{(viii)} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}); \\ \text{(ix)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}); \\ \text{(x)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}; \\ \text{(xi)} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}; \\ \text{(xii)} \vdash \forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}; \\ \text{(xiii)}\ \exists x\ \mathbf{R} \vdash \exists\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}.\end{cases}$

2.38 ∃-Exportação: Considere que $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \mathbf{S} \\ y \text{ não é livre em } \mathbf{R}. \end{cases}$

- Se $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \mathbf{Q} \\ y \text{ não é livre em } \mathbf{P} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \mathbf{P} \\ y \text{ não é livre em } \mathbf{Q} \end{cases}$, então:

(i) $\exists y\ \mathbf{S} \vdash \forall\mathbf{R}x\exists\mathbf{S}y\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{S}y\forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$;
(ii) $\exists x\ \mathbf{R} \vdash \forall\mathbf{R}x\exists\mathbf{S}y\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{S}y\forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$;
(iii) $\exists y\ \mathbf{S} \vdash \forall\mathbf{R}x\exists\mathbf{S}y\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists\mathbf{S}y\forall\mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.

Exercícios

1) Um *silogismo* é uma inferência possuindo exatamente duas premissas. Mostre que as seguintes proposições, atribuídas a Aristóteles, as quais são quase todas silogismos[62], são válidas (considere aqui **S**, **M** e **L** fórmulas em **LQC**):

(i) $\forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \to \mathbf{M}) \vdash \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \to \mathbf{L})$ (Barbara).
(ii) $\neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \to \mathbf{M}) \vdash \neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Celarent).
(iii) $\forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{L}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{M}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Darii).
(iv) $\neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{L}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{M}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Ferio).
(v) $\neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{L} \wedge \mathbf{M}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \to \mathbf{M}) \vdash \neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Cesare).
(vi) $\forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{L} \to \mathbf{M}), \neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{M}) \vdash \neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Camestres).
(vii) $\neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{L} \wedge \mathbf{M}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{M}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Festino).
(viii) $\forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{L} \to \mathbf{M}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{M}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Baroco).
(ix) $\exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{M}, \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Darapti).
(x) $\exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{M}, \neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Felapton).
(xi) $\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Disamis).
(xii) $\forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{L}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \mathbf{L})$ (Datisi).
(xiii) $\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \neg\mathbf{L}), \forall \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \to \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Bocardo).
(xiv) $\neg\exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{L}), \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{M} \wedge \mathbf{S}) \vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{L})$ (Ferison).

2) Prove a validade das seguintes versões da regra do ∃-eliminação:

(i) Se $\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \vdash \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \boldsymbol{\Gamma} \cup \{\exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P}, \mathbf{Q}\} \end{cases}$, então $\boldsymbol{\Gamma}, \exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

(ii) Se $\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \boldsymbol{\Gamma} \cup \{\mathbf{Q}\} \end{cases}$, então $\boldsymbol{\Gamma}, \exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

3) Mostre que as seguintes regras de introdução e eliminação de quantificadores típicos são válidas:

(i) Se $\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{R} \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \boldsymbol{\Gamma}, \end{cases}$ então $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(ii) $\forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}, \mathbf{R}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(iii) $\mathbf{R}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}), \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \vdash \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(iv) Se $\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}, \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \boldsymbol{\Gamma} \cup \{\mathbf{Q}\}, \end{cases}$ então $\boldsymbol{\Gamma}, \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

4) Mostre que os seguintes esquemas são válidos:

(i) $\vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\mathbf{P} \to \forall \boldsymbol{x}\,\mathbf{P})$.
(ii) $\vdash \exists \boldsymbol{x}\,(\exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \to \mathbf{P})$.
(iii) $\vdash \forall \boldsymbol{x}\,\top$.
(iv) $\vdash \exists \boldsymbol{x}\,\top$.
(v) $\vdash \neg\exists \boldsymbol{x}\,\bot$.
(vi) $\vdash \neg\forall \boldsymbol{x}\,\bot$.
(vii) $\vdash \forall \bot \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \top$.
(viii) $\vdash \exists \bot \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \bot$.
(ix) $\vdash \forall \top \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(x) $\vdash \exists \top \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(xi) $\vdash \forall \boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \to \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(xii) $\vdash \exists \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \to \exists \boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
(xiii) $\forall \neg\mathbf{P}\boldsymbol{x}\,\mathbf{R} \vdash \forall \mathbf{R}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.

---

[62] Na realidade todas estas proposições foram formuladas originalmente na forma de silogismos, sendo que a terceira premissa que ocorre em duas delas (Darapti e Felapton) era implicitamente subentendida.

(xiv) $\forall \mathbf{P}x\ \mathbf{R} \vdash \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P}$.
(xv) Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\exists x\ \mathbf{R} \vdash \forall \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(xvi) Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\exists x\ \mathbf{R} \vdash \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$.
(xvii) $\vdash \forall \mathbf{R}x\ (\forall \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P})$.
(xviii) $\vdash \forall \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{P})$.
(xix) $\forall \mathbf{R}x\ \mathbf{S} \vdash \forall \mathbf{R}x\ (\forall \mathbf{S}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P})$.
(xx) $\forall \mathbf{R}x\ \mathbf{S} \vdash \forall \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \exists \mathbf{S}x\ \mathbf{P})$.
(xxi) $\forall \mathbf{R}y\ \mathbf{S}(x|y) \vdash \forall \mathbf{R}y\ (\forall \mathbf{S}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}(x|y))$.
(xxii) $\forall \mathbf{R}y\ \mathbf{S}(x|y) \vdash \forall \mathbf{R}y\ (\mathbf{P}(x|y) \rightarrow \exists \mathbf{S}x\ \mathbf{P})$.
(xxiii) Se x não é livre em $\{\mathbf{R},\mathbf{S}\}$, então $\mathbf{R} \rightarrow \exists x\ \mathbf{P},\ \forall x\ (\mathbf{R} \wedge \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P'}),\ \exists x\ \mathbf{P'} \leftrightarrow \mathbf{S} \vdash \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{S}$.

5) Mostre que os seguintes esquemas, concernentes à distributividade e fatorabilidade simples ou degenerada dos quantificadores sobre a disjunção exclusiva, negação conjunta e negação alternativa, são válidos:
(i) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ \mathbf{P} \triangledown \exists x\ \mathbf{Q}$.
(ii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ \mathbf{P} \triangledown \forall x\ \mathbf{Q}$.
(iii) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \triangledown \exists x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q})$.
(iv) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \triangledown \forall x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \triangledown \mathbf{Q})$.
(v) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \downarrow \exists x\ \mathbf{Q}$.
(vi) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ \mathbf{P} \uparrow \exists x\ \mathbf{Q}$.
(vii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ \mathbf{P} \uparrow \forall x\ \mathbf{Q}$.
(viii) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \uparrow \exists x\ \mathbf{Q} \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q})$.
(ix) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ \mathbf{P} \downarrow \forall x\ \mathbf{Q}$.
(x) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \downarrow \exists x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q})$.
(xi) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \downarrow \forall x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q})$.
(xii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \uparrow \forall x\ \mathbf{Q}$.

6) Considerando x não livre em $\mathbf{P}$, mostre que os seguintes esquemas, concernentes ao transporte de quantificadores nas negações conjunta e alternativa, são válidos:
(i) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \downarrow \exists x\ \mathbf{Q}$.
(ii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \downarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \downarrow \forall x\ \mathbf{Q}$.
(iii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \uparrow \exists x\ \mathbf{Q}$.
(iv) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \uparrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P} \uparrow \forall x\ \mathbf{Q}$.

7) Mostre que os seguintes resultados parciais concernentes ao transporte de quantificadores típicos na implicação, conjunção e disjunção são válidos sem haver necessidade da fórmula $\exists x\ \mathbf{R}$ como premissa:
(i) Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \exists \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{P} \rightarrow \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$.
(ii) Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \mathbf{P} \wedge \forall \mathbf{R}x\ \mathbf{Q} \rightarrow \forall \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(iii) Se x não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \exists \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{P} \vee \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{Q}$.
(iv) Se x não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\vdash \exists \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \forall \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$.
(v) Se x não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\vdash \forall \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \rightarrow \forall \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(vi) Se x não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\vdash \exists \mathbf{R}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \exists \mathbf{R}x\ \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$.

8) Mostre que os seguintes esquemas, concernentes ao transporte duplo de quantificadores na implicação, conjunção e disjunção, são válidos:
(i) Se x não é livre em $\mathbf{Q}$ e y não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \Psi x \Upsilon y\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Psi' x\ \mathbf{P} \rightarrow \Upsilon y\ \mathbf{Q}$.
(ii) Se x não é livre em $\mathbf{Q}$ e y não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \Psi x \Upsilon y\ (\mathbf{P}\ \#\ \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Psi x\ \mathbf{P}\ \#\ \Upsilon y\ \mathbf{Q}$.
(iii) Se x não é livre em $\mathbf{P}$ e y não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\vdash \Psi x \Upsilon y\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Upsilon' y\ \mathbf{P} \rightarrow \Psi x\ \mathbf{Q}$.
(iv) Se x não é livre em $\mathbf{P}$ e y não é livre em $\mathbf{Q}$, então $\vdash \Psi x \Upsilon y\ (\mathbf{P}\ \#\ \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Upsilon y\ \mathbf{P}\ \#\ \Psi x\ \mathbf{Q}$.

9) Mostre que as seguintes proposições, concernentes à bifurcação na quantificação típica, são verdadeiras:

(i) $\vdash \forall(\mathbf{R_1} \vee\ldots\vee \mathbf{R_n})\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R_1}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \wedge\ldots\wedge \forall\mathbf{R_n}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash \exists(\mathbf{R_1} \vee\ldots\vee \mathbf{R_n})\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R_1}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \vee\ldots\vee \exists\mathbf{R_n}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.

10) Mostre que, se **P** e **P'** são fórmulas congruentes, então $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P'}$.

11) Sendo $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ ($\mathbf{n} \geq 1$) variáveis distintas, mostre que:

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \exists \boldsymbol{x}_1\ \mathbf{P_1}, \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \exists \boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P_n}, \\ \Gamma,\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n} \vdash \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \Gamma \cup \{\mathbf{Q}\}, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash \mathbf{Q}$.

12) Sendo **n** um inteiro não nulo, mostre que:

(i) $\vdash \neg\Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \Psi'_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi'_n\boldsymbol{x}_n\ \neg\mathbf{P}$.

(ii) Se $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ não são livres em **P**, então $\vdash \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ (\mathbf{P}\ \#\ \mathbf{Q}) \leftrightarrow \mathbf{P}\ \#\ \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{Q}$.

(iii) Se $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ não são livres em **Q**, então $\vdash \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Psi'_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi'_n\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$.

(iv) Se $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ não são livres em **Q** e $* \in \{\wedge,\vee\}$,
então $\vdash \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ (\mathbf{P} * \mathbf{Q}) \leftrightarrow \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} * \mathbf{Q}$.

(v) Se $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n$ não são livres em **P**, então $\vdash \Psi_1\boldsymbol{x}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \Psi_1\boldsymbol{y}_1\ldots\Psi_n\boldsymbol{y}_n\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)$.

13) Definimos abaixo *quantificação simultânea*:[63]

- $\forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \forall\boldsymbol{x}_1\ldots\forall\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$;
- $\exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \exists\boldsymbol{x}_1\ldots\exists\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$.

Mostre que:

(i) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \Gamma, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash \forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$.

(ii) $\forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(iii) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \vdash \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$.

(iv) Se $\begin{cases} \Gamma, \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \Gamma \cup \{\mathbf{Q}\}, \end{cases}$ então $\Gamma, \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

(v) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \Gamma, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(vi) Se $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ não são livres em **P**, então $\begin{cases} \vdash \forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}; \\ \vdash \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}. \end{cases}$

(vii) Se $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n$ não são livres em **P**, então $\begin{cases} \vdash \forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n); \\ \vdash \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n). \end{cases}$

14) Considere **n** um inteiro positivo. Definimos abaixo *quantificação simultânea típica*:

- $\forall\mathbf{R}\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \forall\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ (\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P})$.
- $\exists\mathbf{R}\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \exists\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ (\mathbf{R} \wedge \mathbf{P})$.

Mostre que:

(i) Se $\begin{cases} \Gamma,\mathbf{R} \vdash \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \text{ não são livres em } \Gamma, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash \forall\mathbf{R}\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$.

(ii) $\mathbf{R}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n), \forall\mathbf{R}\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$.

(iii) $\mathbf{R}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n), \mathbf{P}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \vdash \exists\mathbf{R}\ \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\ \mathbf{P}$.

---

[63] Considere a definição de *instanciação simultânea*, dada no exercício 19 da página 33.

(iv) Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P}, \mathbf{R}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n), \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n) \vdash \mathbf{Q}, \\ y_1,\ldots,y_n \text{ não são livres em } \mathbf{\Gamma} \cup \{\exists\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P},\mathbf{Q}\}, \end{cases}$

então $\mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{R} x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

(v) Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ não são livres em } \mathbf{\Gamma} \cup \{\mathbf{Q}\}, \end{cases}$ então $\mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}$.

(vi) Se $x_1,\ldots,x_n$ não são livres em **P**, então $\exists x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{R} \vdash \forall\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$.

(vii) Se $x_1,\ldots,x_n$ não são livres em **P**, então $\exists x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{R} \vdash \exists\mathbf{R}\, x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}$.

(viii) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são livres em {**R**,**P**}, então

$\vdash \forall\mathbf{R}x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)\, y_1,\ldots,y_n\, \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)$.

(ix) Se $y_1,\ldots,y_n$ não são livres em {**R**,**P**}, então

$\vdash \exists\mathbf{R}x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)\, y_1,\ldots,y_n\, \mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n|y_1,\ldots,y_n)$.

15) Considerando que, para quaisquer $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, se $\mathbf{i} > \mathbf{j}$, então $x_\mathbf{i}$ não é livre em $\mathbf{R_j}$, mostre que os seguintes esquemas, concernentes ao *aninhamento de quantificadores típicos*, são válidos:

(i) $\vdash \forall(\mathbf{R}_1 \wedge\ldots\wedge \mathbf{R}_n)x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}_1x_1\ldots\forall\mathbf{R}_nx_n\, \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash \exists(\mathbf{R}_1 \wedge\ldots\wedge \mathbf{R}_n)x_1,\ldots,x_n\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists\mathbf{R}_1x_1\ldots\exists\mathbf{R}_nx_n\, \mathbf{P}$.

16) Considere a definição de fórmula dual dada no exercício 21 da página 47. Adaptamos a definição de fórmula dual para **LQC** segundo as cláusulas abaixo:

- $\mathbf{P_d} = \mathbf{P}$, se **P** é uma fórmula atômica.
- $(\forall x\, \mathbf{P})_\mathbf{d} = \exists x\, \mathbf{P_d}$.
- $(\exists x\, \mathbf{P})_\mathbf{d} = \forall x\, \mathbf{P_d}$.

Dada uma fórmula **P** em **LQC**, notamos por $\mathbf{P_{cj}}$ a fórmula obtida de **P** substituindo cada fórmula atômica precedida por um número par de sinais de negação pela sua negação, e cada fórmula atômica precedida por um número ímpar de sinais de negação por ela própria.

Considere também as definições de $\mathbf{\Gamma_d}$ e $\mathbf{\Gamma_{cj}}$, dadas no exercício 21 da página 18, com a devida adaptação.

Mostre que:

(i) $\vdash (\mathbf{P_d})_\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash (\mathbf{P_{cj}})_\mathbf{cj} \leftrightarrow \mathbf{P}$.

(iii) $(\mathbf{P_d})_\mathbf{cj} = (\mathbf{P_{cj}})_\mathbf{d}$.

(iv) $\vdash \mathbf{P_d} \leftrightarrow \neg(\mathbf{P_{cj}})$.

(v) $\vdash (\mathbf{P_d})_\mathbf{cj} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}$.

(vi) $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\neg(\mathbf{\Gamma_d}) \vdash \neg(\mathbf{P_d})$.

(vii) Se **P** e **Q** são fórmulas contraditórias, então $\mathbf{P_{cj}}$ e $\mathbf{Q_{cj}}$ são fórmulas contraditórias.

(viii) $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\mathbf{\Gamma_{cj}} \vdash \mathbf{P_{cj}}$.

(ix) $\vdash \mathbf{P}$ se, e somente se, $\vdash \neg(\mathbf{P_d})$.

(x) $\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ se, e somente se, $\vdash \mathbf{Q_d} \rightarrow \mathbf{P_d}$.

(xi) $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ se, e somente se, $\vdash \mathbf{P_d} \leftrightarrow \mathbf{Q_d}$.

17) Prove a validade das seguintes leis da substituição:

(i) Esquema da Substituição da Equivalência:

Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2\}$ tais que **S** está no seu escopo em **Q**, então $\forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{P}_1 \leftrightarrow \mathbf{P}_2) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}||\mathbf{P}_1) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}||\mathbf{P}_2)$.

(ii) Regra da Substituição da Equivalência:

Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}_1 \leftrightarrow \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \mathbf{\Gamma} \text{ e em } \{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2\}, \end{cases}$ então

$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}||\mathbf{P}_1) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}||\mathbf{P}_2)$.

18) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema da substituição da equivalência, considerando que $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que $\mathbf{S}$ está no seu escopo em $\mathbf{Q}$, e levando em conta a definição de disjunção exclusiva, dada no exercício 8 da página 16:

(i) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(ii) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(iii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,(\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,(\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2})$.

(iv) $\vdash \exists x_1\ldots\exists x_n\,(\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,(\mathbf{P_1} \veebar \mathbf{P_2}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

19) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema da substituição da equivalência, considerando que $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\mathbf{P}$ tais que $\mathbf{S}$ está no seu escopo em $\mathbf{Q}$:

(i) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.

(ii) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,\neg\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,\neg\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.

(iii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\mathbf{P}$.

(iv) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\neg\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top) \rightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\neg\mathbf{P}$.

(v) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.

(vi) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.

(vii) $\vdash \exists x_1\ldots\exists x_n\,\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.

(viii) $\vdash \exists x_1\ldots\exists x_n\,\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \leftrightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\,\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.

20) Considere a definição de positividade e de negatividade de uma fórmula em outra fórmula, dada no exercício 24 da página 19. Adaptamos esta definição para **LQC** acrescentando que:

- $\mathbf{P}$ é positivo nas fórmulas $\forall x\,\mathbf{P}$ e $\exists x\,\mathbf{P}$.

Mostre que:

(i) Se $\begin{cases} \mathbf{S} \text{ é estritamente positivo em } \mathbf{Q}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ são as variáveis livres em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\} \text{ tais que } \mathbf{S} \text{ está no seu escopo em } \mathbf{Q}, \end{cases}$

então $\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(ii) Se $\begin{cases} \mathbf{S} \text{ é estritamente negativo em } \mathbf{Q}, \\ x_1,\ldots,x_n \text{ são as variáveis livres em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\} \text{ tais que } \mathbf{S} \text{ está no seu escopo em } \mathbf{Q}, \end{cases}$

então $\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

(iii) Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ é estritamente positivo em } \mathbf{Q}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \mathbf{\Gamma} \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$

então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(iv) Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ é estritamente negativo em } \mathbf{Q}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \mathbf{\Gamma} \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$

então $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

21) Considerando que $\mathbf{S}$ é estritamente positivo em $\mathbf{Q}$ e $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que $\mathbf{S}$ está no seu escopo em $\mathbf{Q}$, mostre que:

(i) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \rightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(ii) $\vdash (\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})) \rightarrow (\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}))$.

22) Considerando que $\mathbf{S}$ é estritamente negativo em $\mathbf{Q}$ e $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que $\mathbf{S}$ está no seu escopo em $\mathbf{Q}$, mostre que:

(i) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \rightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

(ii) $\vdash (\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})) \rightarrow (\forall x_1\ldots\forall x_n\,(\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}))$.

23) Considerando que **S** é estritamente positivo em **Q** e $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em **P** tais que **S** está no seu escopo em **Q**, mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$.

(ii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top)$.

24) Considerando que **S** é estritamente negativo em **Q** e $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em **P** tais que **S** está no seu escopo em **Q**, mostre que:

(i) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\bot)$.

(ii) $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\top) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P})$.

25) Mostre que:

(i) Se $\vdash \mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}$, então $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(ii) Se $\begin{cases} \vdash \mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ é estritamente positivo em } \mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

(iii) Se $\begin{cases} \vdash \mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ é estritamente negativo em } \mathbf{Q}, \end{cases}$ então $\vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1})$.

26) Sejam **f** e **p** respectivamente um sinal funcional e um sinal predicativo, ambos de aridade **n**, **t** e **P** respectivamente um termo e uma fórmula, ambos possuindo no máximo $x_1,\ldots,x_n$ como variáveis livres, e **u** um termo sem variáveis livres. Levando em conta a definição de substituição uniforme dada no exercício 20 da página 35, prove a validade das seguintes *leis da substituição uniforme*:

(i) Se $\Gamma \vdash \mathbf{P}$, então $\Gamma(\mathbf{c}\|\mathbf{u}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{c}\|\mathbf{u})$.[64]

(ii) Se $\Gamma \vdash \mathbf{P}$, então $\Gamma[\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{t}] \vdash \mathbf{P}[\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{t}]$.

(iii) Se $\Gamma \vdash \mathbf{P}$, então $\Gamma[\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{P}] \vdash \mathbf{P}[\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{P}]$.

27) Considerando que $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ possuem no máximo $x_1,\ldots,x_n$ como variáveis livres, prove a validade do *esquema da substituição uniforme da equivalência*:

- $\forall x_1\ldots\forall x_n\ (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q}[\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{P_1}] \leftrightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)|\mathbf{P_2}]$.

28) Dizemos que **P'** é obtido de **P** pela eliminação de seus *quantificadores vácuos* se todas as subfórmulas de **P** de uma das formas $\forall x\ \mathbf{Q}$ ou $\exists x\ \mathbf{Q}$, onde x não é livre em **Q**, forem sucessivamente substituídas pelos seus corpos **Q**.

(i) Defina recursivamente uma função, aqui denominada **eqv**, que associa a cada fórmula **P** em **LQC** a fórmula **eqv**(**P**), obtida de **P** pela eliminação de seus quantificadores vácuos.

(ii) Mostre que $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{eqv}(\mathbf{P})$.

29) Uma *fórmula prenex* é uma fórmula da forma $\Psi_1 x_1\ldots\Psi_n x_n\ \mathbf{P}$, onde $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$ são um dos quantificadores "∀" ou "∃", e **P** não possui quantificadores. Mostre que toda fórmula em **LQC** é equivalente a uma fórmula prenex, isto é, dada uma fórmula **P**, existe uma fórmula prenex **P'** tal que $\vdash \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P'}$.

---

[64] Uma constante também pode ser vista como um sinal funcional de aridade **0**, daí esta forma da lei da substituição uniforme poderia ser reescrita como "se $\Gamma \vdash \mathbf{P}$, então $\Gamma[\mathbf{c}(x_1,\ldots,x_0)|\mathbf{u}] \vdash \mathbf{P}[\mathbf{c}(x_1,\ldots,x_0)|\mathbf{u}]$".

4. A LÓGICA EQUACIONAL CLÁSSICA

Este capítulo apresenta a *Lógica Equacional Clássica*, ou simplesmente **LEC**. Esta lógica estuda todas as propriedades clássicas dos conectivos, dos quantificadores, da igualdade e suas possíveis interações.

§1. Linguagens para a Lógica Equacional Clássica

1.1 Definição: Um *alfabeto para* **LEC** contém todos os sinais de um alfabeto para **LQC**, mais um sinal predicativo diádico, o "=".

1.2 Definição: Os termos e fórmulas em **LEC** são todos os termos e fórmulas obtidos pelas regras de formação de **LQC**, mais as fórmulas da forma $=(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2})$, onde $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ são termos em **LEC**.

Valem aqui todas as convenções anteriores, com as devidas adaptações, sempre que necessário. Seguindo a escrita informal de fórmulas em **LQC**, temos que a fórmula $=(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2})$ pode ser notada por $(\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2})$, e podemos prescindir do seu par exterior de parênteses quando esta não for subfórmula de outra fórmula ou for um dos componentes de uma fórmula formada por um conectivo diádico.

1.3 Leitura: A fórmula $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$ pode ser lida de uma das seguintes formas:

- "$\mathbf{t_1}$ *é igual a* $\mathbf{t_2}$".
- "$\mathbf{t_1}$ *é idêntico a* $\mathbf{t_2}$".

§2. Um Cálculo de Seqüentes para a Lógica Equacional Clássica

Damos abaixo um cálculo de seqüentes para **LEC**. Este se constitui de todas as leis primitivas de **LQC**, mais os *Esquemas Primitivos da Igualdade*. As demais leis podem ser obtidas dos postulados de **LEC**. Todas as leis válidas em **LPC** e **LQC**, devidamente traduzidas para **LEC**, são ainda válidas em **LEC**, com exceção do Esquema da Substituição da Equivalência, dado na pg. 37.

Nesta seção nós falaremos somente da lógica equacional clássica; assim, para dizer que **P** é conseqüência de **Γ** em **LEC**, notaremos isto por $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

Esquemas Primitivos da Igualdade

2.1 Reflexividade da Igualdade: $\vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}$.

2.2 Substituição em Termos Funcionais: $\mathbf{t_1} = \mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{t_n} = \mathbf{u_n} \vdash \mathbf{f}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}) = \mathbf{f}(\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n})$.

2.3 Substituição em Fórmulas Atômicas: $\mathbf{t_1} = \mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{t_n} = \mathbf{u_n} \vdash \mathbf{p}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}) \to \mathbf{p}(\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n})$.

Leis Básicas da Igualdade

A conclusão do esquema da substituição em sinais predicativos pode ser uma equivalência.

2.4 Substituição em Fórmulas Atômicas: $\mathbf{t_1} = \mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{t_n} = \mathbf{u_n} \vdash \mathbf{p}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}) \leftrightarrow \mathbf{p}(\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n})$.

2.5 Simetria da Igualdade: $\mathbf{t} = \mathbf{u} \vdash \mathbf{u} = \mathbf{t}$.

2.6 Transitividade da Igualdade: $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}, \mathbf{t_2} = \mathbf{t_3} \vdash \mathbf{t_1} = \mathbf{t_3}$.

Os esquemas de substituição da igualdade em sinais funcionais e em sinais predicativos admitem suas correspondentes generalizações, conforme é descrito a seguir.

2.7 Esquema da Substituição da Igualdade para Termos: $\mathbf{t_1 = t_2 \vdash u(v \| t_1) = u(v \| t_2)}$.[65]

2.8 Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas:

- Se $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}$ tais que **v** está em **Q** no seu escopo, então $\forall \boldsymbol{x_1}\ldots\forall \boldsymbol{x_n}(\mathbf{t_1 = t_2}) \vdash \mathbf{Q(v\|t_1)} \leftrightarrow \mathbf{Q(v\|t_2)}$.

2.9 Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas:

- Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma \vdash t_1 = t_2}, \\ \mathbf{v} \text{ não está, em } \mathbf{Q}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \mathbf{\Gamma} \text{ e em } \{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}, \end{cases}$ então

  $\mathbf{\Gamma \vdash Q(v\|t_1)} \leftrightarrow \mathbf{Q(v\|t_2)}$.

2.10 Exemplo: Considere que o universo de discurso implícito é a coleção dos números inteiros. Temos que $\mathbf{TNI} \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} + 7 > \boldsymbol{x})$, e daí $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 14 \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} + 7 > \boldsymbol{x})$. Aplicando a este último seqüente a Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas sem obedecer à sua restrição, temos que $\mathbf{TNI}, \boldsymbol{x} = 14 \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} + 7 > 14)$, daí $\mathbf{TNI} \vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} > 7)$, o que é absurdo.

A instanciação de variáveis por termos em fórmulas permite uma formulação correspondente ao esquema da substituição da igualdade para fórmulas sem quaisquer restrições.

2.11 Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas:

- $\mathbf{t_1 = t_2} \vdash \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

O Esquema e a Regra da Substituição da Equivalência, concernentes a **LQC**, formulados na página 37, valem também para **LEC**. Por comodidade repetimos novamente aqui os seus enunciados.

2.12 Esquema da Substituição da Equivalência:

- Se $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que **S** está em **Q** no seu escopo, então $\forall \boldsymbol{x_1}\ldots\forall \boldsymbol{x_n}(\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q(S\|P_1)} \leftrightarrow \mathbf{Q(S\|P_2)}$.

2.13 Regra da Substituição da Equivalência:

- Se $\begin{cases} \mathbf{\Gamma \vdash P_1 \leftrightarrow P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \mathbf{\Gamma} \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$

  então $\mathbf{\Gamma \vdash Q(S\|P_1)} \leftrightarrow \mathbf{Q(S\|P_2)}$.

Uma forma bem importante de absorção de quantificadores envolvendo a igualdade é formulada a seguir.

2.14 Quantificação Pontual: Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em **t**, então:
(i) $\vdash \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = \mathbf{t} \to \mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.
(ii) $\vdash \exists \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{P}) \leftrightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$.

Podemos estender a quantificação pontual para mais de um objeto, como é mostrado a seguir.

2.15 Quantificação Pontual Plural: Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em $\{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}$, então:
(i) $\vdash \forall(\boldsymbol{x} = \mathbf{t_1} \vee \boldsymbol{x} = \mathbf{t_2})\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.
(ii) $\vdash \exists(\boldsymbol{x} = \mathbf{t_1} \vee \boldsymbol{x} = \mathbf{t_2})\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \vee \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

---

[65] Em linguagens nas quais termos não possuem variáveis ligadas, como é o caso de **LQC** e **LEC**, temos que $\mathbf{u(v\|t)}$ é idêntico a $\mathbf{u(v|t)}$, daí esta lei também poderia ser denominada "Esquema da Instanciação da Igualdade para Termos".

2.16 Definição: $\mathbf{t_1} \neq \mathbf{t_2} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2})$.

2.17 Unificação pela Substituição:

- Se **v** não está, em **Q**, no escopo de nenhuma variável livre em $\{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}$, então $\mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}), \neg\mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2}) \vdash \mathbf{t_1} \neq \mathbf{t_2}$.

2.18 Unificação pela Instanciação: $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}), \neg\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2}) \vdash \mathbf{t_1} \neq \mathbf{t_2}$.

Leis Básicas dos Quantificadores Numéricos

Na Lógica Equacional, para cada número inteiro **n**, positivo ou nulo, é possível definir três quantificadores existenciais especiais, ditos também *quantificadores numéricos*, usados para a representação formal de expressões dos tipos "existem pelo menos **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$", "existem no máximo **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$" e "existem exatamente **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$".

A fórmula $\exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$, já por nós conhecida, corresponde à expressão "existe pelo menos um objeto $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$". O caso em que $\mathbf{n} = 1$ é o mais importante para aplicações imediatas. Definimos abaixo a representação formal de expressões do tipo "existe no máximo um objeto $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$" e "existe um único objeto $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$".

2.19 Definição:

- $\overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \forall\boldsymbol{x_1}\forall\boldsymbol{x_2}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x_1}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x_2}) \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2})$, onde $\boldsymbol{x_1}$,$\boldsymbol{x_2}$ são as primeiras variáveis não livres em $\exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.
- $\exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \wedge \overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.

A definição de $\overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ foi concebida levando em conta a sua uniformidade com as demais definições dos quantificadores numéricos lidando com diferentes pluralidades de objetos, as quais são dadas na lista de exercícios desta seção, porém o seu caso particular admite uma pequena simplificação. Tanto esta simplificação como a irrelevância na escolha das variáveis $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$[66] são formulados a seguir.

2.20 Formas Equivalentes para $\overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$: As seguintes fórmulas são equivalentes em **LEC**, onde $\boldsymbol{x_1}$,$\boldsymbol{x_2}$ são variáveis distintas não livres em $\exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$ e $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\{\boldsymbol{x},\mathbf{P}\}$:

(i) $\overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.
(ii) $\forall\boldsymbol{x_1}\forall\boldsymbol{x_2}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x_1}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x_2}) \rightarrow \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2})$.
(iii) $\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$.
(iv) $\exists\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$.

2.21 Absorção de Quantificadores Numéricos: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\{\mathbf{t},\exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}\}$, então as seguintes fórmulas são equivalentes em **LEC**:

(i) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \wedge \exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.
(ii) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \wedge \overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.
(iii) $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) \wedge \forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{t})$.
(iv) $\forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leftrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{t})$.

2.22 Formas Equivalentes para $\exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\{\boldsymbol{x},\mathbf{P}\}$, então as seguintes fórmulas são equivalentes em **LEC**:

(i) $\exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$.
(ii) $\exists\boldsymbol{x}\ (\mathbf{P} \wedge \overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{P})$.
(iii) $\exists\boldsymbol{x}\ (\mathbf{P} \wedge \forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}))$.
(iv) $\exists\boldsymbol{x}\ \forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$.

2.23 Vinculação: $\forall\boldsymbol{x}\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}), \overline{\exists}\boldsymbol{x}\ \mathbf{Q} \vdash \exists\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.

[66] A importância na determinação das variáveis $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ é, no entanto, fundamental para definir-se uma fórmula única em cada caso, e não uma classe de fórmulas.

2.24 Distributividade e Fatorabilidade Disparadas de Quantificadores:
(i) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \vee \forall x\ \mathbf{Q}$;
(iii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(iv) $\bar{\bar{\exists}}x\ \neg\mathbf{Q} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(v) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q}$;
(vi) $\bar{\bar{\exists}}x\ \neg\mathbf{P} \wedge \bar{\bar{\exists}}x\ \neg\mathbf{Q} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(vii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(viii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$.

2.25 Distributividade e Fatorabilidade Degeneradas Disparadas de Quantificadores:
(i) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(ii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(iii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \vee \exists x\ \mathbf{Q}$;
(iv) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \vee \forall x\ \mathbf{Q}$;
(v) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(vi) $\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P} \wedge \bar{\bar{\exists}}x\ \neg\mathbf{Q} \vdash (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(vii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(viii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(ix) $\bar{\bar{\exists}}x\ \neg\mathbf{P} \wedge \bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{Q} \vdash (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(x) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(xi) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(xii) $\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \rightarrow \forall x\ \mathbf{Q}$;
(xiii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q}$;
(xiv) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{P} \wedge \forall x\ \mathbf{Q}$;
(xv) $\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P} \wedge \bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{Q} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(xvi) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$;
(xvii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$;
(xviii) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ \mathbf{Q})$;
(xix) $\bar{\bar{\exists}}x\ (\mathbf{P} \vee \neg\mathbf{Q}) \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow (\exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ \mathbf{Q})$.

Exercícios

1) Mostre que os seguintes esquemas derivados da simetria e da transitividade da igualdade são válidos:
(i) $\vdash \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \leftrightarrow \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1$.
(ii) $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_3,\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 \vdash \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$.
(iii) $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1,\ \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_2 \vdash \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$.

2) Mostre que:
(i) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \neg\mathbf{P} \rightarrow \exists x\ \exists y\ (x \neq y)$.
(ii) $\vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \wedge \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \wedge \exists x\ (\neg\mathbf{P}) \rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$.

3) Mostre que as seguintes proposições concernentes a quantificadores numéricos são verdadeiras:
(i) $\vdash \bar{\bar{\exists}}x\ \bot$.
(ii) $\vdash \neg\exists x\ \bot$.
(iii) $\vdash \neg\exists x\ (x \neq x)$.
(iv) $\vdash \neg\exists! x\ \bot$.
(v) $\vdash \neg\exists! x\ (x \neq x)$.
(vi) $\vdash \neg\exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P}$.
(vii) $\vdash \neg\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2\ (x_1 \neq x_2 \wedge \mathbf{P}(x|x_1) \wedge \mathbf{P}(x|x_2))$, onde x_1, x_2 são variáveis distintas não livres em $\exists x\ \mathbf{P}$.
(viii) $\vdash \neg\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x \exists y\ (x \neq y \wedge \mathbf{P} \wedge \mathbf{P}(x|y))$, onde y não é livre em $\{x, \mathbf{P}\}$.
(ix) $\vdash \neg\exists! x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \neg\exists x\ \mathbf{P} \vee \neg\bar{\bar{\exists}}x\ \mathbf{P}$.

(x) Se x não é livre em $\mathbf{t}$, então $\vdash \exists! x\ (x = \mathbf{t})$.
(xi) $\vdash \forall y\ \exists! x\ (x = \mathbf{y})$.
(xii) Se y não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \overline{\overline{\exists}} y\ \mathbf{P}(x|y)$.
(xiii) Se y não é livre em $\mathbf{P}$, então $\vdash \exists! x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists! y\ \mathbf{P}(x|y)$.
(xiv) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q} \rightarrow \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P})$.
(xv) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q})$.
(xvi) $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \vee \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q} \rightarrow \overline{\overline{\exists}} x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(xvii) $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \wedge \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q}$.
(xviii) $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \overline{\overline{\exists}} x\ \neg\mathbf{P} \wedge \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q}$.
(xix) $\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P}, \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q}, \neg\exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vdash \overline{\overline{\exists}} x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.
(xx) $\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P}, \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{Q}, \exists x\ \mathbf{P} \wedge \exists x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vdash \overline{\overline{\exists}} x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.
(xxi) $\vdash \exists x\ \overline{\overline{\exists}} y\ \mathbf{P} \rightarrow \overline{\overline{\exists}} y\ \forall x\ \mathbf{P}$.
(xxii) $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\ \exists y\ \mathbf{P} \rightarrow \forall y\ \overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P}$.
(xxiii) $\vdash \exists x\ \overline{\overline{\exists}} y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \overline{\overline{\exists}} y\ \exists x\ \mathbf{P}$.
(xxiv) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists! x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists! x\ \mathbf{Q})$.
(xxv) $\vdash \exists! x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \exists! x\ \mathbf{P} \vee \exists! x\ \mathbf{Q}$.
(xxvi) $\vdash \exists! x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \exists! x\ \neg\mathbf{P} \vee \exists! x\ \mathbf{Q}$.
(xxvii) $\vdash \exists! x\ \exists y\ \mathbf{P} \rightarrow \exists y\ \exists! x\ \mathbf{P}$.
(xxviii) $\exists x\ \mathbf{P} \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(xxix) $\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.
(xxx) $\exists! x\ \mathbf{P} \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(xxxi) $\exists x\ \mathbf{P} \vdash \neg\exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.
(xxxii) $\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \vdash \neg\forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \neg\mathbf{Q})$.
(xxxiii) $\overline{\overline{\exists}} x\ \mathbf{P} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \rightarrow \neg\exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.
(xxxiv) $\exists! x\ \mathbf{P} \vdash \neg\exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \leftrightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$.

4) Mostre que, se x não é livre em $\{\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n}\}$, então:
(i) $\vdash \forall(x = \mathbf{t_1} \vee\ldots\vee x = \mathbf{t_n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\mathbf{t_1}) \wedge\ldots\wedge \mathbf{P}(x|\mathbf{t_n})$.
(ii) $\vdash \exists(x = \mathbf{t_1} \vee\ldots\vee x = \mathbf{t_n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\mathbf{t_1}) \vee\ldots\vee \mathbf{P}(x|\mathbf{t_n})$.

5) Se y não é livre em $\{\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_n},\exists x\ \mathbf{P}\}$, então as seguintes fórmulas são equivalentes:
(i) $\bigwedge(\mathbf{P}(x|\mathbf{t_1}),\ldots,\mathbf{P}(x|\mathbf{t_n})) \wedge \forall y\ (\mathbf{P}(x|y) \rightarrow \bigvee(y = \mathbf{t_1},\ldots,y = \mathbf{t_n}))$.
(ii) $\forall y\ (\mathbf{P}(x|y) \leftrightarrow \bigvee(y = \mathbf{t_1},\ldots,y = \mathbf{t_n}))$.

6) Sejam $\mathbf{f}$ um sinal funcional de aridade $\mathbf{n}$, $\mathbf{R}$ uma fórmula cuja única variável livre é y, e $z_1,\ldots,z_n$ as primeiras $\mathbf{n}$ variáveis distintas entre si e não livres em $\{y,\mathbf{R}\}$. Definimos então:

- $\mathbf{f}$ *é* $\mathbf{n}$*-sobrejetivo em* $\mathbf{R} \rightleftharpoons \forall\mathbf{R}\ y\ \exists z_1,\ldots,z_n\ (y = \mathbf{f}(z_1,\ldots,z_n))$.

Considerando $x_1,\ldots,x_n$ quaisquer $\mathbf{n}$ variáveis distintas entre si e não livres em $\{y,\mathbf{R}\}$, mostre que:
(i) $\vdash \mathbf{f}$ é $\mathbf{n}$-sobrejetivo em $\mathbf{R} \leftrightarrow \forall\mathbf{R}\ y\ \exists x_1,\ldots,x_n\ (y = \mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n))$.
(ii) Se $x_1,\ldots,x_n$ também não são livres em $\mathbf{P}$, então
$\mathbf{f}$ é $\mathbf{n}$-sobrejetivo em $\mathbf{R} \vdash \Psi\mathbf{R}(y|\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n))\ x_1,\ldots,x_n\ \mathbf{P}(y|\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n)) \leftrightarrow \Psi\mathbf{R}\ y\ \mathbf{P}$.

7) Dado um termo $\mathbf{t}$ e uma fórmula $\mathbf{R}$ não possuindo variáveis livres comuns tal que y é a única variável livre em $\mathbf{R}$, e sendo $x_1,\ldots,x_n$ a lista ordenada das variáveis livres em $\mathbf{t}$, definimos:

- $\mathbf{t}$ *é sobrejetivo em* $\mathbf{R} \rightleftharpoons \forall\mathbf{R}\ y\ \exists x_1,\ldots,x_n\ (y = \mathbf{t})$.

Mostre que, se $x_1,\ldots,x_n$ também não são livres em $\mathbf{P}$, então
$\mathbf{t}$ é sobrejetivo em $\mathbf{R} \vdash \Psi\mathbf{R}(y|\mathbf{t})\ x_1,\ldots,x_n\ \mathbf{P}(y|\mathbf{t}) \leftrightarrow \Psi\mathbf{R}\ y\ \mathbf{P}$.

8) Prove a validade das seguintes leis da substituição e da instanciação da igualdade:
(i) Esquema da Substituição da Igualdade para Termos: $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2} \vdash \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.
(ii) Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas:
Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}$ tais que $\mathbf{v}$ está em $\mathbf{Q}$ no seu escopo,
então $\forall x_1\ldots\forall x_n(\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.

(iii) Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas:

Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{t_1 = t_2}, \\ \mathbf{v} \text{ não está, em } \mathbf{Q}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{t_1,t_2}\}, \end{cases}$ então

$\Gamma \vdash \mathbf{Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)}$.

(iv) Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas:

$\mathbf{t_1 = t_2} \vdash \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

9) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema da substituição da igualdade para fórmulas, considerando que $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{t_1,t_2}\}$ tais que **v** está em **Q** no seu escopo:

(i) $\vdash \forall \boldsymbol{x}_1\ldots\forall \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 = t_2}) \wedge \mathbf{Q(v\|t_1)} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_1\ldots\forall \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 = t_2}) \wedge \mathbf{Q(v\|t_2)}$.

(ii) $\vdash \forall \boldsymbol{x}_1\ldots\forall \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 = t_2}) \rightarrow \mathbf{Q(v\|t_1)} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_1\ldots\forall \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 = t_2}) \rightarrow \mathbf{Q(v\|t_2)}$.

(iii) $\vdash \mathbf{Q(v\|t_1)} \rightarrow \exists \boldsymbol{x}_1\ldots\exists \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 \neq t_2}) \leftrightarrow \mathbf{Q(v\|t_2)} \rightarrow \exists \boldsymbol{x}_1\ldots\exists \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 \neq t_2})$.

(iv) $\vdash \exists \boldsymbol{x}_1\ldots\exists \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 \neq t_2}) \vee \mathbf{Q(v\|t_1)} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}_1\ldots\exists \boldsymbol{x}_n\, (\mathbf{t_1 \neq t_2}) \vee \mathbf{Q(v\|t_2)}$.

10) Prove a validade da seguinte conseqüência adicional do esquema da substituição da igualdade para fórmulas:

- Se $\vdash \mathbf{t_1 = t_2}$, então $\vdash \mathbf{Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)}$.

11) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema da instanciação da igualdade para fórmulas:

(i) $\vdash \mathbf{t_1 = t_2} \wedge \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{t_1 = t_2} \wedge \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

(ii) $\vdash \mathbf{t_1 = t_2} \rightarrow \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{t_1 = t_2} \rightarrow \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

(iii) $\vdash \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \rightarrow \mathbf{t_1 \neq t_2} \leftrightarrow \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2}) \rightarrow \mathbf{t_1 \neq t_2}$.

(iv) $\vdash \mathbf{t_1 \neq t_2} \vee \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{t_1 \neq t_2} \vee \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

12) Dada uma lista de **n** termos $\mathbf{t_1,\ldots,t_n}$, definimos formas simples de expressar que pelo menos dois deles são iguais ou que todos eles são diferentes dois a dois. Consideramos também o caso em que $\mathbf{n} = 0$.

- $=() \rightleftharpoons \bot$.
- Se $\mathbf{n} \geq 0$, então $=(\mathbf{t_1,\ldots,t_{n+1}}) \rightleftharpoons =(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \vee \bigvee(\mathbf{t_1 = t_{n+1},\ldots,t_n = t_{n+1}})$.
- $\neq() \rightleftharpoons \top$.
- Se $\mathbf{n} \geq 0$, então $\neq(\mathbf{t_1,\ldots,t_{n+1}}) \rightleftharpoons \neq(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \wedge \bigwedge(\mathbf{t_1 \neq t_{n+1},\ldots,t_n \neq t_{n+1}})$.

De uma forma análoga ao que foi feito no exercício 29 da página 20, consideramos definida permutação de uma lista de termos. Seja $(\mathbf{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}})$ uma permutação de $(\mathbf{t_1,\ldots,t_n})$.

Mostre que:

(i) $\vdash =(\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \bot$.

(ii) $\vdash \neq(\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \top$.

(iii) $\vdash \neg=(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \leftrightarrow \neq(\mathbf{t_1,\ldots,t_n})$.

(iv) $\vdash \neg\neq(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \leftrightarrow =(\mathbf{t_1,\ldots,t_n})$.

(v) $\vdash =(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \leftrightarrow =(\mathbf{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}})$.

(vi) $\vdash \neq(\mathbf{t_1,\ldots,t_n}) \leftrightarrow \neq(\mathbf{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}})$.

13) Sejam $\mathbf{P_1,\ldots,P_n}$ **n** fórmulas e Γ uma coleção de fórmulas tal que:

- $\bigvee(\mathbf{P_1,\ldots,P_n}) \in \Gamma$;
- para quaisquer $\mathbf{i,j} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $\neg(\mathbf{P_i} \wedge \mathbf{P_j}) \in \Gamma$;
- para cada $\mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$, $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P_i} \in \Gamma$.

Mostre que $\Gamma \vdash \exists \boldsymbol{x}_1\ldots\exists \boldsymbol{x}_n \neq(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$.

14) Dadas duas listas de termos $\langle \mathbf{t_1,\ldots,t_n} \rangle$ e $\langle \mathbf{u_1,\ldots,u_p} \rangle$, definimos formas simples de expressar que pelo menos um termo da primeira lista é igual a pelo menos um termo da segunda lista, e que todos os termos da primeira lista são distintos de todos os termos da segunda lista. Consideramos também os casos em que **n** ou **p** são nulos.

- $=(\langle \mathbf{t_1,\ldots,t_n} \rangle,\langle\rangle) \rightleftharpoons \bot$.
- $=(\langle \mathbf{t_1,\ldots,t_n} \rangle,\langle \mathbf{u_1,\ldots,u_p,u_{p+1}} \rangle) \rightleftharpoons =(\langle \mathbf{t_1,\ldots,t_n} \rangle,\langle \mathbf{u_1,\ldots,u_p} \rangle) \vee \bigvee(\mathbf{t_1 = u_{p+1},\ldots,t_n = u_{p+1}})$.

- $\neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle\rangle) \rightleftharpoons \top$.
- $\neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p,\mathbf{u}_{p+1}\rangle) \rightleftharpoons \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \wedge \bigwedge(\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{u}_{p+1},\dots,\mathbf{t}_n \neq \mathbf{u}_{p+1})$.

Considerando $(\mathbf{t}_{i_1},\dots,\mathbf{t}_{i_n})$ e $(\mathbf{u}_{j_1},\dots,\mathbf{u}_{j_p})$ respectivamente permutações de $(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n)$ e $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p)$, mostre que:

(i) $\vdash =(\langle\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \bot$.
(ii) $\vdash =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle,\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle)$.
(iii) Se $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$, então
$\vdash =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_i\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \vee =(\langle \mathbf{t}_{i+1},\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(iv) Se $1 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{p}$, então
$\vdash =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_j\rangle) \vee =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_{j+1},\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(v) $\vdash =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\langle \mathbf{t}_{i_1},\dots,\mathbf{t}_{i_n}\rangle,\langle \mathbf{u}_{j_1},\dots,\mathbf{u}_{j_p}\rangle)$.
(vi) $\vdash \neq(\langle\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \top$.
(vii) $\vdash \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle,\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle)$.
(viii) Se $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$, então
$\vdash \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_i\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \wedge \neq(\langle \mathbf{t}_{i+1},\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(ix) Se $1 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{p}$, então
$\vdash \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_j\rangle) \wedge \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_{j+1},\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(x) $\vdash \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\langle \mathbf{t}_{i_1},\dots,\mathbf{t}_{i_n}\rangle,\mathbf{u}_{j_1},\dots,\mathbf{u}_{j_p}\rangle)$.
(xi) $\vdash \neg{=}(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(xii) $\vdash \neg{\neq}(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle),\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle)$.
(xiii) $\vdash =(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n) \vee =(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p) \vee =(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow =(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p)$.
(xiv) $\vdash \neq(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n) \wedge \neq(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p) \wedge \neq(\langle \mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n\rangle,\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p\rangle) \leftrightarrow \neq(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p)$.

15) Definimos abaixo os *quantificadores numéricos plurais*[67], para qualquer numeral **n** correspondente a um inteiro positivo ou nulo. Considere nas três cláusulas seguintes que $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n+1}$ são as primeiras $\mathbf{n} + 1$ variáveis distintas não ocorrendo em $\forall\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$:

- $\exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \rightleftharpoons \forall\boldsymbol{x}_1\dots\forall\boldsymbol{x}_{n+1}\,(\bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{n+1})) \rightarrow =(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n+1}))$.
- $\exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \rightleftharpoons \exists\boldsymbol{x}_1\dots\exists\boldsymbol{x}_n\,(\bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_n)) \wedge \neq(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n))$.
- $\exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \rightleftharpoons \exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \wedge \exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.

Temos que:

- "$\exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" é lido "existem no máximo **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que **P**".
- "$\exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" é lido "existem pelo menos **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que **P**".
- "$\exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" é lido "existem exatamente **n** objetos $\boldsymbol{x}$ tais que **P**".

Observe que, para o caso particular em que $\mathbf{n} = 0$, temos, implicitamente, as seguintes definições:

- $\exists(\leq 0)\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \rightleftharpoons \forall\boldsymbol{x}_1\,(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1) \rightarrow =(\boldsymbol{x}_1))$, onde $\boldsymbol{x}_1$ é a primeira variável não livre em $\exists\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$.
- $\exists(\geq 0)\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \rightleftharpoons \bigwedge() \wedge \neq()$.

Observe também que, para o caso particular em que $\mathbf{n} = 1$:

- As fórmulas "$\exists(\leq 1)\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" e "$\overline{\exists}\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" são idênticas; são notações alternativas para a mesma fórmula.
- As fórmulas "$\exists(=1)\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" e "$\exists!\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$" também constituem notações alternativas para a mesma fórmula.

Mostre que:

(i) Se $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n+1}$ são quaisquer variáveis distintas não livres em $\forall\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$, então
$\vdash \exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \forall\boldsymbol{x}_1\dots\forall\boldsymbol{x}_{n+1}\,(\bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{n+1})) \rightarrow =(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n+1}))$.
(ii) Se $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ são quaisquer variáveis distintas não livres em $\forall\boldsymbol{x}\,\mathbf{P}$, então
$\vdash \exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists\boldsymbol{x}_1\dots\exists\boldsymbol{x}_n\,(\bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_n)) \wedge \neq(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n))$.
(iii) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq\mathbf{n})\boldsymbol{y}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.
(iv) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\geq\mathbf{n})\boldsymbol{y}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.
(v) Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\vdash \exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{y}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.
(vi) $\vdash \forall\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq 0)\boldsymbol{x}\,\neg\mathbf{P}$.
(vii) $\vdash \forall\boldsymbol{x}\,\mathbf{P} \leftrightarrow \exists(=0)\boldsymbol{x}\,\neg\mathbf{P}$.

---

[67] Isto é, os quantificadores numéricos envolvendo usualmente dois ou mais objetos.

(viii) $\vdash \exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\geq 1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(ix) $\vdash \exists(\leq 0)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \neg\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(x) $\vdash \exists(\geq 0)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xi) $\vdash \exists(=0)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \neg\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xii) $\vdash \exists(\leq 1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \overline{\overline{\exists}}\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xiii) $\vdash \exists(\geq 1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xiv) $\vdash \exists(=1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists!\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xv) $\vdash \exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x} \top \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_1 \ldots \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1} = (\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1})$.
(xvi) $\vdash \exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x} \top \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} \neq (\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}})$.
(xvii) $\vdash \exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x} \top \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} (\neq(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}) \wedge \forall \boldsymbol{y} \bigvee(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}))$.
(xviii) $\vdash \exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x} \perp$.
(xix) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \neg\exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x} \perp$.
(xx) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \neg\exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x} \perp$.
(xxi) $\vdash \neg\exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\geq \mathbf{n}+1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xxii) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \neg\exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq \mathbf{n}-1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xxiii) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \neg\exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq \mathbf{n}-1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \vee \exists(\geq \mathbf{n}+1)\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xxiv) Se $\mathbf{n} \leq \mathbf{p}$, então $\vdash \exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \rightarrow \exists(\leq \mathbf{p})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(xxv) Se $\mathbf{n} \leq \mathbf{p}$, então $\vdash \exists(\geq \mathbf{p})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \rightarrow \exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.

16) A equivalência das seguintes fórmulas expressa *formas equivalentes para quantificadores numéricos maximais*[68], onde $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1},\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas não livres em $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$:
(i) $\exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(ii) $\forall \boldsymbol{x}_1 \ldots \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1} (\bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1})) \rightarrow =(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1}))$.
(iii) Se $0 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$, então
$$\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}} \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1} \ldots \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1} (\neq(\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1}),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1})) \rightarrow =(\langle \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}}\rangle,\langle \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}+1}\rangle))$$.
(iv) $\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} \forall \boldsymbol{y} (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow =(\langle \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}\rangle,\langle \boldsymbol{y}\rangle))$.

17) Escreva fórmulas equivalentes à fórmula $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{i}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_{\mathbf{i}})) \wedge \exists(\leq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$, onde $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$, levando em conta as fórmulas (ii), (iii) e (iv) do exercício anterior.

18) A equivalência das seguintes fórmulas expressa *formas equivalentes para quantificadores numéricos minimais*[69], onde $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}},\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas não livres em $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$:
(i) $\exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(ii) $\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} (\neq(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}})))$.
(iii) Se $0 \leq \mathbf{i} < \mathbf{n}$, então
$$\forall \boldsymbol{x}_1 \ldots \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}}\, \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1} \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} (\neq(\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1}),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}})) \wedge \neq(\langle \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}}\rangle,\langle \boldsymbol{x}_{\mathbf{i}+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}\rangle))$$.
(iv) $\forall \boldsymbol{x}_1 \ldots \forall \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}-1}\, \exists \boldsymbol{y} (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \wedge \neq(\langle \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}-1}\rangle,\langle \boldsymbol{y}\rangle))$.

19) Escreva fórmulas equivalentes à fórmula $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{i}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_{\mathbf{i}})) \wedge \exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$, onde $1 \leq \mathbf{i} < \mathbf{n}$, levando em conta as fórmulas (ii), (iii) e (iv) do exercício anterior.

20) Mostre que:
(i) $\vdash \neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{n}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_{\mathbf{n}})) \rightarrow \exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(ii) $\vdash \neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{n}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_{\mathbf{n}})) \wedge \exists(\geq \mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P} \leftrightarrow \neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_{\mathbf{n}}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}_{\mathbf{n}}))$.

21) A equivalência das seguintes fórmulas expressa formas equivalentes para quantificadores numéricos isomais[70], onde $0 \leq \mathbf{j} < \mathbf{i} + 1$, $0 \leq \mathbf{i} < \mathbf{n}$, e $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}},\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_{\mathbf{i}+1}$ são variáveis distintas não livres em $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$:
(i) $\exists(=\mathbf{n})\boldsymbol{x}\, \mathbf{P}$.
(ii) $\exists \boldsymbol{x}_1 \ldots \exists \boldsymbol{x}_{\mathbf{n}} \forall \boldsymbol{y} (\neq(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}) \wedge (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leftrightarrow =(\langle \boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{\mathbf{n}}\rangle,\langle \boldsymbol{y}\rangle)))$.

---

[68] Isto é, quantificadores da forma "$\exists(\leq \mathbf{n})$".
[69] Isto é, quantificadores da forma "$\exists(\geq \mathbf{n})$".
[70] Isto é, quantificadores da forma "$\exists(=\mathbf{n})$".

(iii) $\forall x_1 \ldots \forall x_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \exists y_1 \ldots \exists y_j \forall y_{j+1} \ldots \forall y_{i+1}$
$(\neq(x_{i+1},\ldots,x_n) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(x|x_{i+1}),\ldots,\mathbf{P}(x|x_n)) \wedge \neq(\langle x_1,\ldots,x_i\rangle,\langle x_{i+1},\ldots,x_n\rangle)$
$\wedge (\bigwedge(\mathbf{P}(x|y_{j+1}),\ldots,\mathbf{P}(x|y_{i+1})) \rightarrow =(\langle x_{i+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_j\rangle,\langle y_{j+1},\ldots,y_{i+1}\rangle)))$.

(iv) $\forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} \exists y \exists y_1 \ldots \exists y_j \forall y_{j+1} \ldots \forall y_n$
$(\mathbf{P}(x|y) \wedge \neq\langle(x_1,\ldots,x_{n-1}),(y)\rangle \wedge (\bigwedge(\mathbf{P}(x|y_{j+1}),\ldots,\mathbf{P}(x|y_n)) \rightarrow =(\langle y,y_1,\ldots,y_j\rangle,\langle y_{j+1},\ldots,y_n\rangle)))$.

(v) $\forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} \exists y \forall y_1 \ldots \forall y_n$
$(\mathbf{P}(x|y) \wedge \neq(\langle x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle,\langle y\rangle) \wedge (\bigwedge(\mathbf{P}(x|y_1),\ldots,\mathbf{P}(x|y_n)) \rightarrow =(\langle y\rangle,\langle y_1,\ldots,y_n\rangle)))$.

22) Escreva fórmulas equivalentes à fórmula $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_i) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_i)) \wedge \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P}$, onde $1 \leq \mathbf{i} < \mathbf{n}$, levando em conta as fórmulas (ii), (iii), (iv) e (v) do exercício anterior.

23) Mostre que as seguintes fórmulas são equivalentes, onde y não é livre em $\{\forall x\ \mathbf{P},\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n\}$:

(i) $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_n)) \wedge \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P}$.

(ii) $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_1),\ldots,\mathbf{P}(x|\mathbf{t}_n)) \wedge \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P}$.

(iii) $\neq(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n) \wedge \forall y\ (\mathbf{P}(x|y) \leftrightarrow \bigvee(y = \mathbf{t}_1,\ldots,y = \mathbf{t}_n))$.

24) Mostre que as seguintes proposições adicionais sobre quantificadores numéricos são válidas:

(i) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vee \exists(\leq\mathbf{n}\text{-}1)x\ \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vee \exists(\geq\mathbf{n}+1)x\ \mathbf{P}$.

(iii) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \neg\exists(\leq\mathbf{n}\text{-}1)x\ \mathbf{P} \wedge \neg\exists(\geq\mathbf{n}+1)x\ \mathbf{P}$.

(iv) Se $\mathbf{n} \geq 1$, então $\vdash \exists(\leq\mathbf{n}\text{-}1)x\ \mathbf{P} \vee \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vee \exists(\geq\mathbf{n}+1)x\ \mathbf{P}$.

(v) Se $\mathbf{n} < \mathbf{p}$, então $\vdash \neg(\exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \wedge \exists(\geq\mathbf{p})x\ \mathbf{P})$.

(vi) Se $\mathbf{n} < \mathbf{p}$, então $\vdash \neg(\exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \wedge \exists(=\mathbf{p})x\ \mathbf{P})$.

(vii) Se $\mathbf{n} < \mathbf{p}$, então $\vdash \neg(\exists(\geq\mathbf{p})x\ \mathbf{P} \wedge \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P})$.

(viii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P})$.

(ix) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q})$.

(x) $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vee \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists(\leq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.

(xi) $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \rightarrow \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \wedge \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q}$.

(xii) $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \exists(\leq\mathbf{n})x\ \neg\mathbf{P} \wedge \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q}$.

(xiii) $\vdash \exists x\ \exists(\leq\mathbf{n})y\ \mathbf{P} \rightarrow \exists(\leq\mathbf{n})y\ \forall x\ \mathbf{P}$.

(xiv) $\vdash \exists(\leq\mathbf{n})x\ \exists y\ \mathbf{P} \rightarrow \forall y\ \exists(\leq\mathbf{n})x\ \mathbf{P}$.

(xv) $\vdash \exists x\ \exists(\leq\mathbf{n})y\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\leq\mathbf{n})y\ \exists x\ \mathbf{P}$.

(xvi) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \rightarrow \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q})$.

(xvii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q})$.

(xviii) $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \wedge \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q}$.

(xix) $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vee \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists(\geq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$.

(xx) $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})x\ \neg\mathbf{P} \vee \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{Q} \rightarrow \exists(\geq\mathbf{n})x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.

(xxi) $\vdash \exists(\geq\mathbf{n})x\ \forall y\ \mathbf{P} \rightarrow \forall y\ \exists(\geq\mathbf{n})x\ \mathbf{P}$.

(xxii) $\vdash \exists x\ \exists(\geq\mathbf{n})y\ \mathbf{P} \rightarrow \exists(\geq\mathbf{n})y\ \exists x\ \mathbf{P}$.

(xxiii) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{Q})$.

5. A LÓGICA DESCRITIVA CLÁSSICA

Este capítulo apresenta uma versão de uma *lógica descritiva*, construída sobre a Lógica Equacional Clássica. Como a mesma é erigida a partir de um sistema de lógica clássica, e preserva todas as suas leis, chamamos este sistema de *Lógica Descritiva Clássica*, ou simplesmente **LDC**. Esta lógica estuda conjuntamente as propriedades dos conectivos, dos quantificadores, da igualdade e das descrições nela definidas.

§1. Linguagens para a Lógica Descritiva Clássica

1.1 Definição: Um *alfabeto para* **LDC** contém todos os sinais de um alfabeto para **LEC**, mais um sinal especial, dito *qualificador*, o qual forma termos a partir de uma variável e de uma fórmula, o "τ". O qualificador "τ" é chamado de *artigo definido*.

1.2 Definição: Os termos e fórmulas em **LDC** são todos os termos e fórmulas obtidos pelas regras de formação de **LEC**, mais os termos da forma τx **P**, onde **P** é uma fórmula em **LDC**. Tais termos são ditos *descrições em* **LDC**. A fórmula **P** é também chamada de *corpo da descrição* τx **P**.

1.3 Leitura: O termo τx **P** pode ser lido como "*o* ***x*** *tal que* **P**".[71]

1.4 Interpretações para τx P: O termo τx **P** pode ser interpretado de duas formas distintas:

- Em todos os contextos em que a fórmula $\exists! x$ **P** for verdadeira, τx **P** denota o único objeto do universo de discurso que satisfaz **P**; todas as descrições deste tipo são chamadas, nestes contextos, de *descrições próprias*.
- Quando a fórmula $\exists! x$ **P** for falsa, τx **P** denota um objeto do universo de discurso escolhido arbitrariamente para corresponder a todas as descrições deste tipo; todas as descrições deste gênero são chamadas, nos contextos em que elas ocorrerem, de *descrições impróprias*.

Nos termos da forma τx **P** as ocorrências de x livres em **P** tornam-se ligadas em τx **P**, daí serão necessárias algumas adaptações com respeito às definições presentes em **LQC** e **LEC**; todas as demais definições e convenções não alteradas nesta seção continuam valendo para **LDC**.

1.5 Definição: Um *designador em* **LDC** é um termo ou uma fórmula em **LDC**.

1.6 Notação: No resto deste capítulo, as letras **D**,**E**,**F**,**G**, seguidas ou não de plicas ou subíndices, referem-se a designadores em **LDC**, a não ser que seja expresso o contrário.

1.7 Definição: Uma *ocorrência de uma variável* ***x*** *em um designador* **D** é dita ser *ligada em* **D** se a mesma figurar em um subdesignador[72] de **D** de uma das formas $\forall x$ **P**, $\exists x$ **P** ou τx **P**; caso contrário esta ocorrência é dita ser *livre em* **D**.

1.8 Definição: Uma *variável* é dita ser *livre em um designador* se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre neste designador; da mesma forma esta *variável* é dita ser *ligada em um designador* se esta possuir pelo menos uma ocorrência ligada neste designador. Uma *variável* é dita ser *livre em uma coleção de designadores* se ela for livre em pelo menos um elemento desta coleção.

A seguir a definição 3.1.17, de instanciação de uma variável por um termo, válida para **LQC**, é adaptada para **LDC**.

---

[71] Tal leitura não reflete precisamente o significado de τx **P**, como será visto a seguir.
[72] Isto é, um designador que ocorre em **D**, o qual pode ser outro designador ou o próprio **D**.

1.9 Definição: A *instanciação de* $\boldsymbol{x}$ *por* $\mathbf{t}$ *em* $\mathbf{D}$, notada por $\mathbf{D}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$, é o designador obtido de **D** substituindo todas as ocorrências livres de $\boldsymbol{x}$ por **t**, se **D** não possuir quantificadores nem o artigo definido. Caso houver alguma ocorrência de quantificadores ou do artigo definido na fórmula envolvida, então tal instanciação é definida conforme as seguintes cláusulas, onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas e $\boldsymbol{\Psi} \in \{\forall, \exists, \tau\}$:

- $(\boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P}$;
- $(\boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}) = \begin{cases} * \ \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}), \text{ se } \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \mathbf{P} \text{ ou } \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \mathbf{t}; \\ * \ \boldsymbol{\Psi z}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}|\mathbf{t}), \text{ se } \boldsymbol{x} \text{ é livre em } \mathbf{P} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ é livre em } \mathbf{t}, \text{ onde} \\ \quad \boldsymbol{z} \text{ é a primeira variável não ocorrendo em } \{\boldsymbol{x}, \mathbf{t}, \mathbf{P}\}. \end{cases}$

Especificamos a seguir uma relação entre designadores, a qual é uma extensão da relação de congruência entre fórmulas, definida na página 28.

1.10 Definição: Nas cláusulas abaixo especificamos quando dois designadores em **LDC** são *congruentes*, considerando $\boldsymbol{\Psi} \in \{\forall, \exists, \tau\}$:

- $\boldsymbol{x} \approx_c \mathbf{x}$.
- $\mathbf{c} \approx_c \mathbf{c}$.
- $\mathbf{f}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}) \approx_c \mathbf{g}(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r})$ se, e somente se, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ e, para cada $\mathbf{i} \in \{1, \ldots, \mathbf{n}\}$, $\mathbf{t_i} \approx_c \mathbf{u_i}$.
- $\mathbf{p}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}) \approx_c \mathbf{q}(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r})$ se, e somente se, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ e, para cada $\mathbf{i} \in \{1, \ldots, \mathbf{n}\}$, $\mathbf{t_i} \approx_c \mathbf{u_i}$.
- $\neg\mathbf{P} \approx_c \neg\mathbf{Q}$ se, e somente se, $\mathbf{P} \approx_c \mathbf{Q}$.
- $\mathbf{P_1} \# \mathbf{Q_1} \approx_c \mathbf{P_2} \# \mathbf{Q_2}$ se, e somente se, $\mathbf{P_1} \approx_c \mathbf{P_2}$ e $\mathbf{Q_1} \approx_c \mathbf{Q_2}$.
- Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\boldsymbol{\Psi x}\ \mathbf{P} \approx_c \boldsymbol{\Psi y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.
- Se $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ forem designadores de tipos diferentes, então não é verdade que $\mathbf{D_1} \approx_c \mathbf{D_2}$.

§2. Um Cálculo de Seqüentes para a Lógica Descritiva Clássica

Nesta seção nós falaremos somente da Lógica Descritiva Clássica; assim, para dizer que **P** é conseqüência de $\boldsymbol{\Gamma}$ em **LDC**, notaremos isto por $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

Damos abaixo um cálculo de seqüentes para **LDC**. Este se constitui de todas as leis primitivas de **LEC**, mais alguns esquemas adicionais; estas são ditas *primitivas* com respeito a este cálculo; também são chamadas de *postulados* de **LDC**. Todas as demais leis válidas de **LDC** podem ser obtidas a partir das leis primitivas ou postulados desta lógica.

Todas as *leis derivadas de* **LEC**, devidamente traduzidas para a linguagem de **LDC**, também são válidas em **LDC**, com exceção do Esquema da Substituição da Igualdade para Termos, dado na pg. 58, o qual não é válido nesta forma em **LDC**, por supor implicitamente um fato não necessariamente presente em **LDC**, devido à sua distinta estrutura sintática, na qual termos podem ter variáveis ligadas.

Esquemas Primitivos da Descrição

2.1 Descrição Própria: $\vdash \exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \to \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P})$;

2.2 Descrições Equivalentes: $\vdash \forall\boldsymbol{x}\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \to \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} = \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{Q}$;

2.3 Descrições Congruentes: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em **P**, então $\vdash \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} = \tau\boldsymbol{y}\ \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.

2.4 Descrições Impróprias: $\neg\exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}, \neg\exists!\boldsymbol{y}\ \mathbf{Q} \vdash \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} = \tau\boldsymbol{y}\ \mathbf{Q}$.

Leis Básicas da Descrição

2.5 Existência e Unicidade: Se $\boldsymbol{y}$ não é livre em $\tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}$, então valem as seguintes proposições:

(i) $\vdash \exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leftrightarrow \boldsymbol{y} = \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P})$;

(ii) $\vdash \exists!\boldsymbol{x}\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) \wedge \forall\boldsymbol{y}\ (\mathbf{P}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{y} = \tau\boldsymbol{x}\ \mathbf{P})$.

2.6 Congruência: As seguintes proposições concernentes à congruência são válidas:
(i) Se **t** é congruente a **t'**, então $\vdash$ **t = t'**.
(ii) Se **P** é congruente a **P'**, então $\vdash$ **P** $\leftrightarrow$ **P'**.

Antes da formulação das regras da substituição de **LDC** é necessária uma reformulação de mais alguns conceitos já presentes em **LQC** e em **LEC**, concernentes à *substituição de designador por designador em um designador*, e *escopo de uma variável em um designador*.

2.7 Definição: Uma *ocorrência* de um designador em um designador **E** é dita *real em* **E** se a mesma não suceder em **E** um dos sinais "∀", "∃", ou "τ". Um designador **D** é dito ser real em **E** se **D** possuir pelo menos uma ocorrência real em **E**. A *substituição de* **D** *por* **D'** *em* **E**, onde **D** e **D'** são ambos termos ou ambos fórmulas, notada por **E(D‖D')**, é o designador obtido de **E** substituindo todas as ocorrências reais de **D** em **E** por **D'**.

Abaixo é estendida a definição 3.1.21, de *escopo de uma variável em uma fórmula*, para *escopo de uma variável em um designador*.

2.8 Definição: Um designador **D** é dito *estar no escopo de uma variável* ***x*** *em um designador* **E** se **E** possuir um subdesignador de uma das formas ∀***x*** **R**, ∃***x*** **R** ou τ***x*** **R**, tal que **D** é real em **R**.[73]

Quase todas as leis da substituição de **LEC** valem em **LDC** da mesma forma, com exceção do *Esquema da Substituição da Igualdade para Termos*, o qual admite em **LDC** duas formulações alternativas, ambas com algumas restrições quanto à sua aplicação, devido à existência, em **LDC**, de termos possuindo variáveis ligadas.

2.9 Esquema da Substituição da Igualdade para Termos:
- Se $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em {**t₁**,**t₂**} tais que **v** está em **u** no seu escopo,
  então $\forall \boldsymbol{x_1}\ldots\forall \boldsymbol{x_n}\ (\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}) \vdash \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.

2.10 Regra da Substituição da Igualdade para Termos:
- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}, \\ \mathbf{v} \text{ não está, em } \mathbf{u}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}, \end{cases}$ então
  $\Gamma \vdash \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.

Nas linguagens para **LDC** a instanciação de variáveis por termos em termos não é idêntica à substituição de variáveis por termos em termos, daí faz-se necessária uma formulação explícita de um esquema de instanciação da igualdade para termos, no qual não há restrições de aplicação.

2.11 Esquema da Instanciação da Igualdade para Termos:
- $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2} \vdash \mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_1}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{x}|\mathbf{t_2})$.

O *Esquema* e a *Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas*, bem como o *Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas*, concernentes a **LEC**, valem da mesma forma em **LDC**. Os mesmos são novamente, por comodidade, enunciados a seguir.

2.12 Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas:
- Se $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_n}$ são as variáveis livres em {**t₁**,**t₂**} tais que **v** está em **Q** no seu escopo,
  então $\forall \boldsymbol{x_1}\ldots\forall \boldsymbol{x_n}\ (\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.

2.13 Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas:
- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}, \\ \mathbf{v} \text{ não está, em } \mathbf{Q}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}\}, \end{cases}$ então
  $\Gamma \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{v}\|\mathbf{t_2})$.

---

[73] Se ***x*** está no escopo forte de ***y*** em **D**, então ***x*** está no escopo de ***y*** em **D**, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira.

2.14 Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas:

- $\mathbf{t_1 = t_2} \vdash \mathbf{Q}(x|\mathbf{t_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(x|\mathbf{t_2})$.

Nas linguagens para **LDC** fórmulas podem ocorrer em termos, daí existem em **LDC** duas leis adicionais concernentes à substituição de fórmulas por fórmulas em termos.

2.15 Esquema da Substituição da Equivalência para Termos:

- Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que **S** está em **u** no seu escopo, então $\forall x_1\ldots\forall x_n\ (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{u}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) = \mathbf{u}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

2.16 Regra da Substituição da Equivalência para Termos:

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{u}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$ então

  $\Gamma \vdash \mathbf{u}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) = \mathbf{u}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

O *Esquema* e a *Regra da Substituição da Equivalência para Fórmulas* são válidos da mesma forma tanto em **LQC** e **LEC** como em **LDC**[74]. Os mesmos são novamente enunciados a seguir.

2.17 Esquema da Substituição da Equivalência para Fórmulas:

- Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}$ tais que **S** está em **Q** no seu escopo, então $\forall x_1\ldots\forall x_n\ (\mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}) \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

2.18 Regra da Substituição da Equivalência para Fórmulas:

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{P_1} \leftrightarrow \mathbf{P_2}, \\ \mathbf{S} \text{ não está, em } \mathbf{Q}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}\}, \end{cases}$ então

  $\Gamma \vdash \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_1}) \leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{S}\|\mathbf{P_2})$.

2.19 Definição: Sejam $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ dois designadores, tal que ambos são termos ou ambos são fórmulas. A samblagem "$\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}$" representa a fórmula "$\mathbf{D_1} = \mathbf{D_2}$", se $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ são ambos termos, e representa a fórmula "$\mathbf{D_1} \leftrightarrow \mathbf{D_2}$" se $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ são ambos fórmulas. A samblagem "$\mathbf{D_1} \not\equiv \mathbf{D_2}$" representa a samblagem "$\neg(\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2})$".

Os Esquemas da Substituição da Igualdade para Termos, da Igualdade para Fórmulas, da Equivalência para Termos e da Equivalência para Fórmulas podem ser expressos em uma só formulação.

2.20 Esquema Geral da Substituição:

- Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\}$ tais que **G** está em **E** no seu escopo, então $\forall x_1\ldots\forall x_n\ (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \vdash \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

As Regras da Substituição da Igualdade para Termos, da Igualdade para Fórmulas, da Equivalência para Termos e da Equivalência para Fórmulas também podem ser expressas em uma só formulação, como faremos logo a seguir.

2.21 Regra Geral da Substituição:

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}, \\ \mathbf{G} \text{ não está, em } \mathbf{E}\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\}, \end{cases}$ então

  $\Gamma \vdash \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

Finalmente, os Esquemas da Instanciação da Igualdade para Termos e para Fórmulas também admitem uma única formulação.

2.22 Esquema Geral da Instanciação para a Igualdade:

- $\mathbf{t_1 = t_2} \vdash \mathbf{E}(x|\mathbf{t_1}) \equiv \mathbf{E}(x|\mathbf{t_2})$.

---

[74] Em **LPC** o *Esquema da Substituição da Equivalência para Fórmulas* é válido sem quaisquer restrições, simplesmente por não haver em suas linguagens variáveis ligadas em fórmulas.

Exercícios

1) Mostre que os seguintes esquemas são válidos:

(i) $\vdash \exists! x\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\tau x\, \mathbf{P}) \wedge \overline{\overline{\exists}} x\, \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash \exists! x\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\tau x\, \mathbf{P}) \wedge \exists! x\, \mathbf{P}$.

(iii) $\neg\exists! x\, \mathbf{P} \vdash \tau x\, \mathbf{P} = \tau x\, (x \neq x)$.

(iv) $\neg\exists! y\, \mathbf{P} \vdash \tau y\, \mathbf{P} = \tau x\, (x \neq x)$.

(v) $\vdash \neg\mathbf{P}(x|\tau x\, \mathbf{P}) \to \neg\exists! x\, \mathbf{P}$.

(vi) $\vdash \tau x\, (x = y) = \mathbf{y}$.

(vii) $\exists! x\, \mathbf{P}, \exists! x\, \mathbf{Q} \vdash \tau x\, \mathbf{P} = \tau x\, \mathbf{Q} \to \forall x\, (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

2) Dado que y não é livre em $\tau x\, \mathbf{P}$, mostre que:

(i) $\vdash \forall y(y = \tau x\, \mathbf{P} \to \mathbf{P}(x|y)) \to \exists x\, \mathbf{P}$.

(ii) $\vdash \exists y(y = \tau x\, \mathbf{P} \wedge \mathbf{P}(x|y)) \to \exists x\, \mathbf{P}$.

(iii) $\vdash \overline{\overline{\exists}} x\, \mathbf{P} \leftrightarrow \forall y(\mathbf{P}(x|y) \to y = \tau x\, \mathbf{P})$.

3) Prove a validade das seguintes leis da substituição e da instanciação para a igualdade:

(i) Esquema Geral da Substituição:
Se $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\}$ tais que $\mathbf{G}$ está em $\mathbf{E}$ no seu escopo, então $\forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \vdash \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

(ii) Regra Geral da Substituição:
Se $\begin{cases} \Gamma \vdash \mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}, \\ \mathbf{G} \text{ não está, em } \mathbf{E}, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\}, \end{cases}$ então
$\Gamma \vdash \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

(iii) Esquema Geral da Instanciação da Igualdade:
$\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2} \vdash \mathbf{E}(x|\mathbf{t_1}) \equiv \mathbf{E}(x|\mathbf{t_2})$.

4) Prove a validade das seguintes conseqüências do esquema geral da substituição, considerando que $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres em $\{\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\}$ tais que $\mathbf{G}$ está em $\mathbf{P}$ no seu escopo:

(i) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

(ii) $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \to \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_n\, (\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}) \to \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

(iii) $\vdash \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \to \exists x_1\ldots\exists x_n\, (\mathbf{D_1} \not\equiv \mathbf{D_2}) \leftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2}) \to \exists x_1\ldots\exists x_n\, (\mathbf{D_1} \not\equiv \mathbf{D_2})$.

(iv) $\vdash \exists x_1\ldots\exists x_n\, (\mathbf{D_1} \not\equiv \mathbf{D_2}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_1}) \leftrightarrow \exists x_1\ldots\exists x_n\, (\mathbf{D_1} \not\equiv \mathbf{D_2}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{G}\|\mathbf{D_2})$.

6. A LÓGICA DAS DESCRIÇÕES INDEFINIDAS

Esta seção apresenta uma segunda versão de uma lógica descritiva, construída sobre a Lógica Equacional Clássica, trabalhando com descrições indefinidas. Chamaremos este sistema de *Lógica das Descrições Indefinidas*, ou simplesmente **LDI**. Esta lógica estuda conjuntamente as propriedades dos conectivos, dos quantificadores, da igualdade e das *descrições indefinidas*.

§1. Linguagens para a Lógica das Descrições Indefinidas

1.1 Definição: Um *alfabeto para* **LDI** contém todos os sinais de um alfabeto para **LEC**, mais um qualificador, o "ε". O qualificador "ε" é chamado de *artigo indefinido*.

1.2 Definição: Os termos e fórmulas em **LDI** são todos os termos e fórmulas obtidos pelas regras de formação de **LEC**, mais os termos da forma ε***x*** **P**, onde **P** é uma fórmula em **LDI**. Tais termos são ditos *descrições em* **LDI**. A fórmula **P** é também chamada de *corpo da descrição* ε***x*** **P**.

1.3 Leitura: O termo ε***x*** **P** pode ser lido como "*um **x** tal que* **P**".[75]

1.4 Interpretações para ε***x*** **P**: O termo ε***x*** **P** pode ser interpretado de duas formas distintas:

- Em todos os contextos em que a fórmula ∃***x*** **P** for verdadeira, ε***x*** **P** denota um objeto do universo de discurso que satisfaz **P**; todas as descrições deste tipo são chamadas, nestes contextos, de *descrições próprias*.
- Quando a fórmula ∃***x*** **P** for falsa, ε***x*** **P** denota um objeto do universo de discurso escolhido arbitrariamente para corresponder a todas as descrições deste tipo; todas as descrições deste gênero são chamadas, nos contextos em que elas ocorrerem, de *descrições impróprias*.

1.5 Exemplo: Considerando a interpretação usual para os sinais contidos no termo $\varepsilon \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \wedge 2 < \boldsymbol{x})$, temos que o mesmo pode significar qualquer número natural maior que 2. Tal termo é uma descrição indefinida, pois não possui um significado determinado.

1.6 Definição: Definimos em **LDI**, de um modo análogo ao realizado para **LDC**, com as adaptações óbvias, *designador em* **LDI**, *ocorrência de variável em um designador*, *ocorrência ligada de uma variável*, *ocorrência livre de uma variável*, *variável ligada em um designador*, *variável livre em um designador*, *instanciação de variável por termo*, *escopo forte de uma variável* e *aceitação de um termo por uma variável*.

1.7 Notação: No resto deste este capítulo, as letras **D**,**E**, seguidas ou não de plicas ou subíndices, referem-se a designadores em **LDI**, a não ser que seja expresso o contrário.

1.8 Convenção: Na formulação das leis lógicas de **LDI**, só consideraremos doravante instanciações de variáveis por termos em designadores nas quais cada termo seja aceito pela variável correspondente.

§2. Um Cálculo de Seqüentes para a Lógica das Descrições Indefinidas

No restante deste capítulo falaremos somente da Lógica das Descrições Indefinidas; assim, para dizer que **P** é conseqüência de **Γ** em **LDI**, notaremos isto por $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{P}$.

Damos a seguir um cálculo de seqüentes para **LDI**. Este se constitui de todas as leis primitivas de **LEC**, mais os esquemas da descrição própria, das descrições equivalentes e das descrições congruentes.

Analogamente a **LDC**, todas as leis de **LEC**, devidamente traduzidas para a linguagem de **LDI**, também são válidas em **LDI**, com exceção do Esquema da Substituição da Igualdade para Termos.

[75] Tal leitura não reflete precisamente o significado de ε***x*** **P**, como será visto a seguir.

Esquemas Primitivos da Descrição Indefinida

2.1 Descrição Própria: $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$;

2.2 Descrições Equivalentes: $\vdash \forall x(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \varepsilon x\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ \mathbf{Q}$;

2.3 Descrições Congruentes: Se y não é livre em **P**, então $\vdash \varepsilon x\ \mathbf{P} = \varepsilon y\ \mathbf{P}(x|y)$.

Leis Básicas da Descrição Indefinida

2.4 Fórmula Existencial: $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

2.5 Fórmula Universal: $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}(x|\varepsilon x\ \neg\mathbf{P})$.

2.6 Definição: A *congruência de designadores em* **LDI** é especificada de um modo análogo ao realizado para **LDC**.

2.7 Congruência: As proposições concernentes à congruência válidas em **LDC** também valem em **LDI**, com a devida adaptação para **LDI**.

2.8 Definição: Definimos em **LDI**, de um modo análogo ao realizado para **LDC**, com as adaptações óbvias, *ocorrência real de um designador*, *designador real*, *substituição de um designador*, e *escopo de uma variável*.

2.9 Escólio: O esquema da substituição da igualdade para termos, a regra da substituição da igualdade para termos, o esquema da instanciação da igualdade para termos, o esquema da substituição da igualdade para fórmulas, a regra da substituição da igualdade para fórmulas, o esquema da instanciação da igualdade para fórmulas, o esquema da substituição da equivalência para termos, a regra da substituição da equivalência para termos, o esquema da substituição da equivalência para fórmulas e a regra da substituição da equivalência para fórmulas valem igualmente em **LDI**.

2.10 Escólio: O esquema geral da substituição, a regra geral da substituição e o esquema geral da instanciação para a igualdade valem também em **LDI**.

<u>Exercícios</u>

1) Mostre que os seguintes esquemas são válidos:

(i) $\neg\exists x\ \mathbf{P} \vdash \varepsilon x\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ (x \neq x)$.

(ii) $\neg\exists x\ \mathbf{P}, \neg\exists y\ \mathbf{Q} \vdash \varepsilon x\ \mathbf{P} = \varepsilon y\ \mathbf{Q}$.

(iii) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ (x = \varepsilon x\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{P})$.

(iv) $\vdash \exists x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ (x = \varepsilon x\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P})$.

(v) $\vdash \overline{\exists} x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow x = \varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(vi) $\vdash \exists! x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ (x = \varepsilon x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P})$.

(vii) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \exists x\ (x = \varepsilon x\ \neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{P})$.

(viii) $\vdash \forall x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall x\ (x = \varepsilon x\ \neg\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P})$.

(ix) $\vdash \forall x\ \neg\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(x) $\exists x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(xi) $\neg\exists x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \leftrightarrow (\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(xii) $\exists! x\ \mathbf{P}, \exists! x\ \mathbf{Q} \vdash \varepsilon x\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ \mathbf{Q} \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$.

(xiii) $\exists x\ \mathbf{P} \vdash \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(xiv) $\overline{\exists} x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \rightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.

(xv) $\exists! x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \leftrightarrow \forall x\ (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q})$.

(xvi) $\exists x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \rightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.

(xvii) $\overline{\exists} x\ \mathbf{P} \vdash \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P})$.

(xviii) $\exists! x\ \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}) \leftrightarrow \exists x\ (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$.

(xix) $\exists x\ \mathbf{P}_1, \overline{\exists} x\ \mathbf{P}_2 \vdash \forall x\ (\mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_2) \rightarrow \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}_2) \rightarrow \mathbf{Q}(x|\varepsilon x\ \mathbf{P}_1)$.

2) O qualificador "τ" de **LDC** pode ser simulado em **LDI** da seguinte forma:

- $\tau x\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \varepsilon x\ (\mathbf{P} \wedge \overline{\exists} x\ \mathbf{P})$.

Mostre que:

(i) $\vdash \exists! x\ \mathbf{P} \to \mathbf{P}(x|\tau x\ \mathbf{P})$ (lei das descrições próprias de **LDC**).
(ii) $\vdash \forall x(\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}) \to \tau x\ \mathbf{P} = \tau x\ \mathbf{Q}$ (lei das descrições equivalentes de **LDC**).
(iii) Se y não é livre em **P**, então $\vdash \tau x\ \mathbf{P} = \tau y\ \mathbf{P}(x|y)$ (lei das descrições congruentes de **LDC**).
(iv) $\neg\exists! x\ \mathbf{P}, \neg\exists! y\ \mathbf{Q} \vdash \tau x\ \mathbf{P} = \tau y\ \mathbf{Q}$ (lei das descrições impróprias de **LDC**).
(v) $\neg\exists! x\ \mathbf{P} \vdash \tau x\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ (x \neq x)$.
(vi) $\neg\exists! y\ \mathbf{P} \vdash \tau y\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ (x \neq x)$.
(vii) $\vdash \overline{\exists} x\ \mathbf{P} \to \varepsilon x\ \mathbf{P} = \tau x\ \mathbf{P}$.

3) Para cada inteiro positivo **n**, um novo qualificador é definido:

- $\varepsilon_1 x\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \varepsilon x\ \mathbf{P}$.
- $\varepsilon_{n+1} x\ \mathbf{P} \rightleftharpoons \varepsilon x\ (\exists(\geq \mathbf{n})x\ \mathbf{P} \wedge \bigwedge(x \neq \varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,x \neq \varepsilon_n x\ \mathbf{P}) \wedge \mathbf{P})$.

Se existirem pelo menos **n** objetos x tais que **P**, então $\varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,\varepsilon_n x\ \mathbf{P}$ denotam tais objetos; caso contrário o termo $\varepsilon_n x\ \mathbf{P}$ é uma descrição imprópria, e daí, como as demais descrições impróprias, denota o objeto do universo de discurso correspondente a todas as descrições impróprias.
Considerando que y não é livre em $\exists x\ \mathbf{P}$, mostre que:

(i) $\vdash \exists(\leq \mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \forall y\ (\mathbf{P}(x|y) \to \bigvee(y = \varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,y = \varepsilon_n x\ \mathbf{P}))$.
(ii) $\vdash \exists(\geq \mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \neq(\varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,\varepsilon_n x\ \mathbf{P}) \wedge \bigwedge(\mathbf{P}(x|\varepsilon_1 x),\ldots,\mathbf{P}(x|\varepsilon_n x\ \mathbf{P}))$.
(iii) $\vdash \exists(=\mathbf{n})x\ \mathbf{P} \leftrightarrow \neq(\varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,\varepsilon_n x\ \mathbf{P}) \wedge \forall y\ (\mathbf{P}(x|y) \leftrightarrow \bigvee(y = \varepsilon_1 x\ \mathbf{P},\ldots,y = \varepsilon_n x\ \mathbf{P}))$.
(iv) $\neg\exists(\geq \mathbf{n})x\ \mathbf{P} \vdash \varepsilon_n x\ \mathbf{P} = \varepsilon x\ (x \neq x)$.
(v) $\neg\exists(\geq \mathbf{n})x\ \mathbf{P}, \neg\exists(\geq \mathbf{p})y\ \mathbf{Q} \vdash \varepsilon_n x\ \mathbf{P} = \varepsilon_p y\ \mathbf{Q}$.

Referências

[1] "A Course in Mathematical Logic", de J. L. Bell & M. Machover, North-Holland.

[2] "A Logical Approach to Discrete Math", de David Gries & Fred B. Schneider, Springer.

[3] "A Mathematical Introduction to Logic", de Herbert B. Enderton, Academic Press.

[4] "Automated Theorem Proving – A Logical Basis", de Donald W. Loveland.

[5] "Axiomatic Set Theory", de Patrick Suppes, Dover Publications.

[6] "Elements of Mathematics: Theory of Sets", de Nicolas Bourbaki, Springer.

[7] "Elements of Set Theory", de Herbert B. Enderton, Academic Press.

[8] "Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica", de Newton C. A. da Costa, Hucitec.

[9] "First Order Mathematical Logic", de Angelo Margaris, Dover Publications.

[10] "First-Order Logic and Automated Theorem Proving", de Melvin Fitting, Springer-Verlag.

[11] "First-Order Logic", de Raymond M. Smullyan, Dover Publications.

[12] "Intermediate Logic", de David Bostock, Clarendon Press & Oxford University Press.

[13] "Introdução à Lógica", de Irving M. Copi, Editora Mestre Jou.

[14] "Introduction to Mathematical Logic", de Elliot Mendelson, International Thomson Publishers.

[15] "Logic and Structure", de D. van Dalen, Springer.

[16] "Logic for Applications", de Anil Nerode & Richard A. Shore, Springer.

[17] "Logic for Mathematicians", de John Barkley Rosser, Chelsea Publishing Company

[18] "Lógica", de John Nolt & Dennis Rohatyn, McGraw-Hill & Makron Books.

[19] "Mathematical Logic", de H. D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas, Springer.

[20] "Mathematical Logic", de J. R. Shoenfield, Addison-Wesley.

[21] "Naive Set Theory", de Paul R. Halmos, Springer.

[22] "O Método dos Tableaux Generalizado e sua Aplicação ao Raciocínio Automático em Lógicas Não Clássicas", de Arthur Buchsbaum & Tarcisio Pequeno, O que nos faz pensar – Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio, 1990, nº 3.

[23] "Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving", Chin-Liang Chang & Richard Char-Tung Lee, Academic Press.

[24] "Naive Set Theory", de Paul R. Halmos, Springer.

[25] "Uma Família de Lógicas Paraconsistentes e/ou Paracompletas com Semânticas Recursivas", de Arthur Buchsbaum e Tarcisio Pequeno, Coleção Documentos – Série de Lógica e Teoria da Ciência nº 14, Instituto de Estudos Avançados, Universidade de São Paulo.